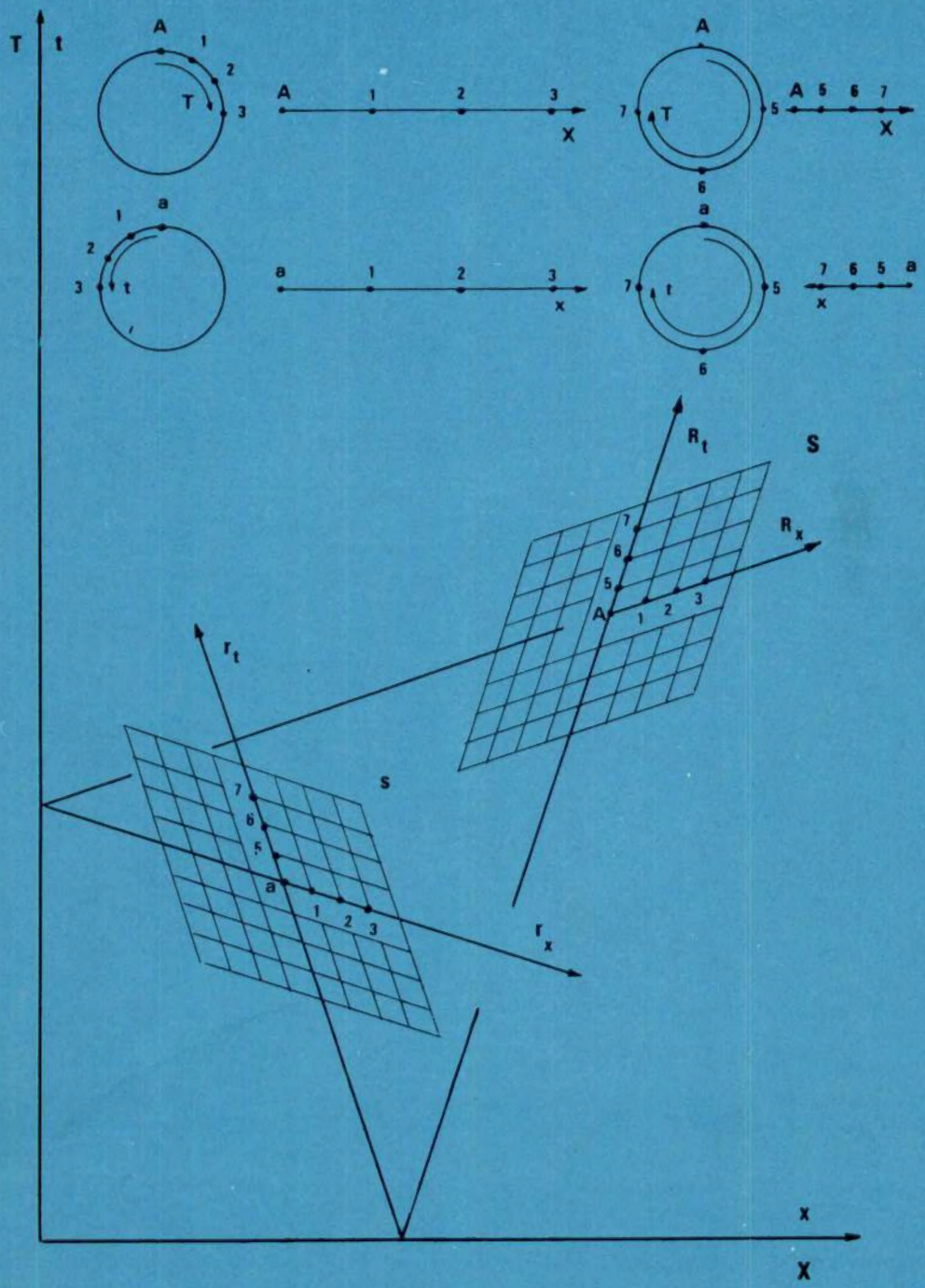
técnica



436 associação dos estudantes do instituto superior técnico
novembro 1976 revista de engenharia

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA CÁLCULO DE BETÃO ARMADO
J. S. Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . 375$00

TOPOGRAFIA GERAL
C. Xerez — 1.º vol. 2.ª edição — 1970 . . (*)
C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . 180$00

TABELAS TÉCNICAS
Vicente e Eng.º Brasão Farinha, 7.ª edição — 1974 250$00

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL
A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 375$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO
Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 35$00

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS
A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 90$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS
G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 75$00

MANUAL DE ESTRUTURAS
Brasão Farinha — 1.º VOLUME . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO
(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . (*)

(*) *LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE*

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À técnica

Carnaxide — Tel. 219 00 37

técnica

NÚMERO 436 NOVEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR

Delmar Baptista

COLABORADORES

António Maria da Fonseca
José Agostinho Marques
Jorge Braz
Armando Ruano
Manuel M. S. Anastácio
José Luís S. V. Azevedo

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 72 93 23

PROPRIETÁRIO

A. E. I. S. T.

•

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	140$00	250$00
Países de língua Portuguesa e Espanha...	150$00	270$00
Estrangeiro	—	300$00
Número avulso ...	—	35$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

•

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
OF. GRÁFICAS DE RÁDIO RENASCENÇA
Rua Duques de Bragança, 6 — LISBOA-2

SUMÁRIO

79 — **M. ABREU FARO — A Geometrical and Mechanical Method to determine Lorentz Transformations.**

Método Geométrico e Mecânico para determinação das Transformações de Lorentz.

87 — **J. C. CONTE — Algumas reflexões sobre representações matriciais de grupos de transformações.**

Some comments on matricial representations of transformation groups.

97 — **J. F. BORGES DA SILVA e J. M. VIEGAS GONÇALVES — Transmissão de ruído através dum dispositivo retentor de amostras.**

Noise transmission through a sample-and-hold device.

113 — **EDUARDO ROMANO DE ARANTES E OLIVEIRA — Teorias de cascas envolvendo momentos de ordem superior à primeira.**

Theories of shells with higher order moments.

121 — **ANTÓNIO JOSÉ REIS e EDUARDO BORGES PIRES — Aplicação da solução do problema de Mindlin na resolução do problema da estaca solicitada por uma força horizontal.**

Application of the solution of Mindlin's problem to the solution of the problem of the pile acted by a horizontal force.

Capa: Ver fig. 4 do artigo «A Geometrical and Mechanical Method to determine Lorentz Transformations» de M. Abreu Faro.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Construções Schréder	2.ª da capa
Fanafel	IV
MAGUE	III
Novobra, Lda.	IV
Sociedade Portuguesa Cavan	II
S. K. F., Lda.	I
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sopecate	II

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

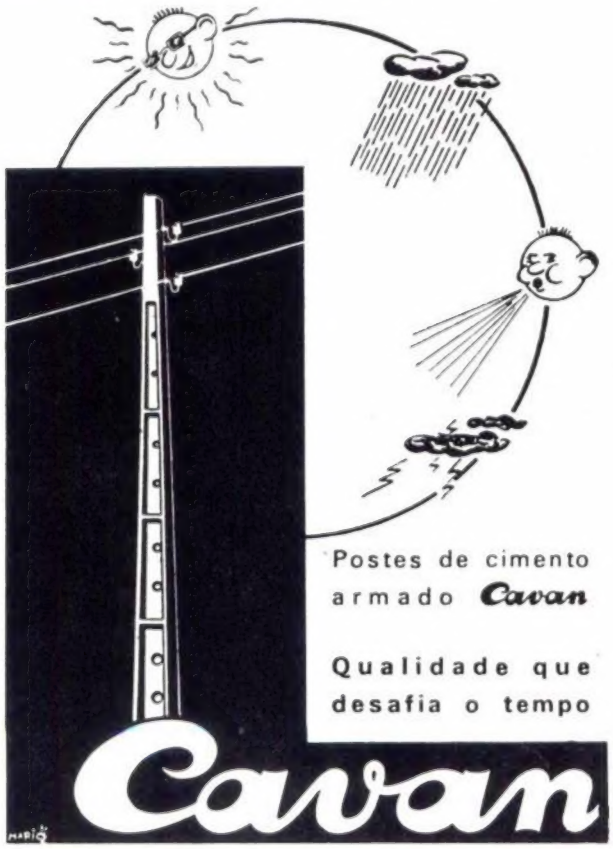
PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

FUNDAÇÕES ESPECIAIS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CAPTAÇÕES DE ÁGUA

Sopecate

ESPECIALISTA DESDE 1947

R. DO ARSENAL, 146 - 2.º
Telf. 320208 - 364010 - 360437
LISBOA - 2



Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

Já pensou...

... que o seu anúncio é muito eficaz se for publicado na revista que os seus clientes lêem? Os milhares de exemplares de cada número da nossa revista são lidos por engenheiros e técnicos, por pessoas ligadas à indústria, à investigação, ao ensino, pelos seus clientes, em suma. Consulte-nos

técnica REVISTA DE ENGENHARIA

Avenida Rovisco Pais - Lisboa 1 - Telef. 72 93 23

técnica

NÚMERO 436 NOVEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 517.43:517.3:518.4

A Geometrical and Mechanical Method to determine Lorentz Transformations

M. ABREU FARO
Electrodynamics Centre (I. N. I. C.)
Technical University of Lisbon (I. S. T.)

SUMÁRIO

Apresenta-se um método geométrico de obtenção das Transformações de Lorentz numa representação gráfica em que os eixos coordenados e homólogos dos dois referenciais se fazem coincidir. Utilizam-se coordenadas cartesianas ortogonais.

O método é susceptível de uma fácil mecanização tendo em vista o traçado automático de trajectórias nos diferentes planos coordenados.

Sob outra forma e numa diferente aproximação, o método foi apresentado pela primeira vez numa comunicação feita em 6 de Maio à classe de Ciências, da Academia das Ciências de Lisboa, sob a designação «Método geométrico de obtenção das Transformações de Lorentz. Propriedades do método e suas aplicações».

Num próximo número da «Técnica» será publicado um artigo, em português, no qual se procederá a uma aplicação do método à resolução de determinados problemas básicos da electrodinâmica dos corpos em movimento.

SUMMARY

A geometrical method to obtain Lorentz Transformations in a graphical representation where the axes of the two frames of reference are made to coincide, is presented. Orthogonal coordinates are used and the method can be mechanized with a view to an automatic drawing of trajectories on the different coordinate planes.

Under a different form and with a different approach, the method was firts presented to the Science Class of Academia das Ciências de Lisbon, on the 6th of May 1976, under the title «Geometrical Method to obtain Lorentz Transformations. Properties of the Method and its Applications».

In one of its next issues Tecnica will publish an article in portuguese where the method will be shown as applied to the resolution of certain basic problems of the electrodynamics of moving media.

I. PRESENTATION OF THE METHOD

Two inertial frames of reference are considered: s(x, y, z, t) and S(X, Y, Z, T), both being rectilinear orthogonal Cartesian coordinates with homologous axes parallel to each other. The velocity of s, relative to S, is v in the direction of the positive X-axis. The origins of s and S coincide at the time t=T=O.

In this case the Lorentz Transformation is:

$$\begin{aligned} X &= \gamma\ (x + \beta\ ct) \\ cT &= \gamma\ (ct + \beta x) \\ Y &= y \qquad Z = z \end{aligned} \tag{1}$$

where

$$\beta = \frac{v}{c} \text{ and } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

and c is the velocity of light in vacuo.

In this method we shall make the t, T-axes coincide with y, Y-axes, see Fig. 1.

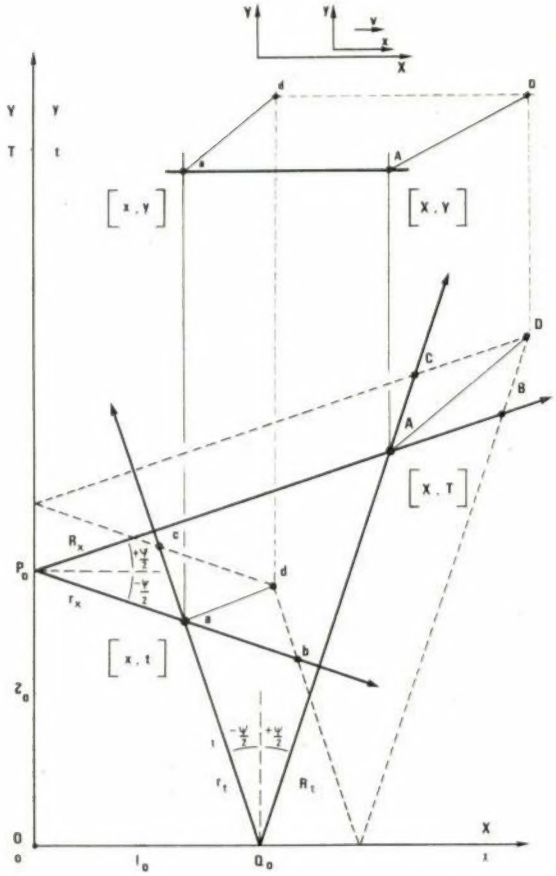


Fig. 1

Illustrates the essencial features of the method Through directions $\pm\ \psi/2$ and points P_0 and Q_0 a bicontinuous mapping is established from [x, t] space into [X, T] space

In order to obtain symmetrical expressions with respect to space and time, we shall consider $c = 1$. After this, (ct) and (CT) are reduced to t and T although having the physical dimension of a length, as obvious.

Having assumed $c = 1$, the transformations (1) take the form

$$X = \gamma\ (x + \beta t)$$
$$T = \gamma\ (t + \beta x) \qquad (1\ a)$$

where t and T have the dimension of a length, as stated, but measuring the time in metric units of length.

The length and time units are the same in both frames of reference. In all figures $v/c = 0{,}6$.

Our purpose is to present a geometrical method of determining the transformations

$$[x,\ t] \rightleftarrows [X,\ T] \qquad (2\ a)$$

in a graphical representation where the homologous axes of the two frames of reference are made to coincide.

Once this has been done the transformations

$$[x,\ y] \rightleftarrows [X,\ Y]$$
$$[x,\ z] \rightleftarrows [X,\ Z] \qquad (2\ b)$$

become immediate considering that by (1) $Y = y$ and $Z = z$.

The method in question can be easily mechanized and thus contribute, we think, towards a simple and quick handling of the Lorentz Transformations specially suited for examining the correlations between space-time coordinates (x, y, z, t) and (X, Y, Z, T) and associated phenomenology.

Beginning with Fig. 1 we shall first present the method to determine the transformations (2 a); after which the theory will be given.

In order to obtain [X, T] from [x, t] we proceed in the following way:

We consider the directions r_x, R_x, r_t and R_t forming angles

$$\measuredangle\ (r_x,\ x) = -\psi/2 \qquad \measuredangle\ (r_t,\ t) = -\psi/2$$
$$\measuredangle\ (R_x,\ X) = +\psi/2 \qquad \measuredangle\ (R_t,\ T) = +\psi/2$$

in accordance with the positive senses adopted and where $\sin\psi = \dfrac{v}{c} = \beta$.

Now, from the point [x, t] we draw a straight line with an r_x direction; the point this straight line intersects the t-axis is P_0; similarly Q_0 is the point an r_t direction intersects the x-axis.

Next we take P_0 and Q_0 as origins of R_x and R_t directions and these lines cross exactly at the [X, T] point.

Conversely [x, t] could be obtained from [X, T] by using the same method.

II. THEORY AND ASSOCIATED PROPERTIES

The theory of the process is a very simple one. As it can be easily verified

$$\tan\psi/2 = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} \qquad (3)$$

From (1 a), the following Lorentz Transformations can also be easily obtained:

$$\left[\ t = \tau_0 - \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma}\,x\ \right] \rightleftarrows \left[\ T = \tau_0 + \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma}\,X\ \right] \qquad (4)$$

$$\left[\ t = -\frac{\beta\gamma}{\gamma - 1}\left(x - l_0\right)\right] \rightleftarrows \left[\ T = \frac{\beta\gamma}{\gamma - 1}\left(X - l_0\right)\right]$$

which means that:

i) Under the transformation (1 a) the image of the straight line r_x $(-\psi/2)$ which intersects $x = o$ at $t = \tau_o$ is the straight line R_x $(+\psi/2)$ which intersects $X = o$ at $T = \tau_o$.

ii) Similarly, the image of the straight line r_t $(-\psi/2)$ which intersects $t = o$ at $x = l_o$ is the straight line R_t $(+\psi/2)$ which intersects $T = o$ at $X = l_o$.

So essentially the method is this:

If [x, t] belongs to the straight lines r_x and r_t, [X, T] belongs to their transforms which are R_x and R_t defined by P_o and Q_o which are common points of intersection at the t, T-axes and x, X-axes of the straight lines r_x and R_x and the straight lines r_t and R_t, respectively.

*
* *

Some interesting properties are associated with the established correspondence.

Let us start by verifying that angle $\psi/2$ is the only one which satisfies the visualized symmetry of the transformed straight lines.

Let m and M be the slopes $m = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ an $M = \frac{\Delta T}{\Delta X}$ of a straight line and its image respectively, then from (1 a) results:

$$M = \frac{m + \beta}{1 + m\beta} \tag{5}$$

If we make

$$m = -M$$

an equation is obtained the roots of which are

$$M_1 = -m_1 = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} = \tan \psi/2$$

$$M_2 = -m_2 = \frac{\gamma + 1}{\beta\gamma} = \text{cotan } \psi/2 = \frac{\beta\gamma}{\gamma - 1} \tag{6}$$

once (3) is considered. Obviously m_1 and M_1 correspond to r_x and R_x and m_2 and M_2 to r_t and R_t.

It is also easy to demonstrate that m_1 and m_2 are the only directions for which a straight line and its image intersect respectively at the common points P_o and Q_o, on the t, T-axes and x, X-axes.

These facts are a joint proof of the uniqueness of $\psi/2$.

*
* *

Another important property becomes apparent from Fig. 1.

Let «a» be a point in s (x, t) and «A» its image in S (X, T), then:

i) If the point «b» belongs to the straight line [a, r_t], then «B» is a point of its transform [A, R_t].

Considering the directions of r_x, r_t, R_x and R_t an immediate conclusion is that

$$ab = AB$$

ii) In the same way, if «c» belongs to [a, r_x] «C» belongs to [A, R_x] and

$$ac = AC$$

Hence, vector $\overrightarrow{ad}$ has in the axes [a, (r_x, r_t)] the same components as vector $\overrightarrow{AD}$ in the axes [A, (R_t, R_x)].

As a corollary, and since the transforms of the origins «o» and «O» are coincident, in our graphical representation the components of a vector $\overrightarrow{oa}$ in axes [o, (r_x, r_t)] coincide with the components of $\overrightarrow{OA}$ in axes [O, (R_t, R_x)] where «A» is the image of «a» and conversely.

The first conclusion is particularly interesting to study the evolution of the points in the vicinity of «a» and «A».

*
* *

Finaly Fig. 2 makes it clear that major problems

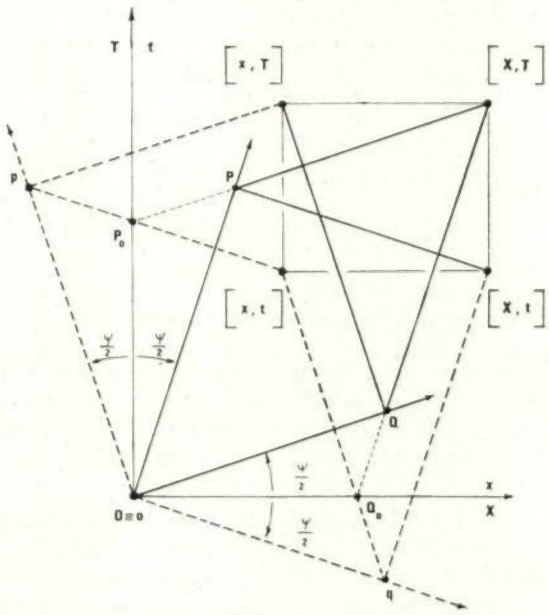


Fig. 2

The directions intervening are always r_x and r_t and R_x and R_t. P and Q are the images of p and q. Once known the hybrid coordinates (x, T) (X, t), (X, x) or (T, t), [x, t] and [X, T] are easily obtained on the basis of this geometry

can be solved taking as a basis ψ angles symmetrically arranged in relation to the coordinate axes.

i) Nameley, the following chains clearly stand out in Fig. 2

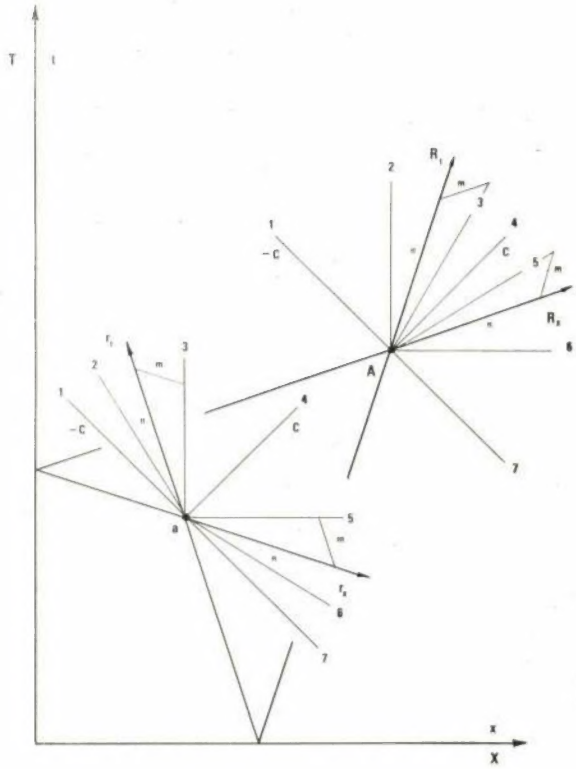


Fig. 3

Directions x = const., t = const. X = const. T = const. and their transforms. Velocity straight lines ± c are transformed into velocity straight lines ± c

$$[x, T] \rightleftarrows Q \rightleftarrows [X, T] \rightleftarrows P \rightleftarrows [X, t]$$
$$[X, t] \rightleftarrows q \rightleftarrows [x, t] \rightleftarrows p \rightleftarrows [x, T] \qquad (7)$$

and solve the problems:

Knowing [x, T] or [X, t], determine [X, T] and [x, t].

ii) Also, considering that the ordinates of P and p are $(T + t)/2$ and the abscissae of Q and q are $(X + x)/2$ the following problems are also solved:

Knowing [X, x] or [T, t], determine [X, T] and [x, t].

These geometrical relations are general and easy to demonstrate, for simplification purposes [x, t] and [X, T] are both in the first quadrant.

Through them it is possible to solve any problem using only the method presented.

However, for the solution of certain problems, it is easier to draw the transformed straight lines from determined directions such as:

x = const.*, t = const.*, X = const.*, T = const.*

This was done in Fig. 3. The procedure will be taken up soon in an article where it will be duly used for a simple and quick resolution of certain concrete problems.

III. PHYSICAL INTERPRETATION OF THE METHOD

in [1]* a different approach was used to obtain the method. Though it will not be repeated here, certain concepts then used will, nevertheless, be taken up.

From now on the method which has appeared to be purely mathematical will also possess a physical substratum in perfect agreement with the principles of Relativity. To this purpose let us consider the transformations (1) which, once differentiated, lead to

$$\Delta X = \gamma\ (\ \Delta x + \beta c\ \Delta t)$$
$$c\Delta T = \gamma\ (c\Delta t + \beta\Delta x) \qquad (8)$$

Let us have

$$\frac{\Delta X}{\Delta T} = U\ , \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} = u$$
$$\frac{\Delta T}{\Delta X} = D\ , \qquad \frac{\Delta t}{\Delta x} = d \qquad (9)$$

As it is obvious U and u represent velocities in the frames S (X, Y, Z, T) and s (x, y, z, t), respectively.

D and d represent that which from now on, will be designated «desynchronization»: variation of the coordinate time, T or t, by unit of length of the coordinate space, X or x.

From (8) and (9) it is easy to obtain the well known law of composition of colinear velocities:

$$U = \frac{u + v}{1 + uv/c^2} \qquad (10a)$$

and the equivalent relation

$$D = \frac{d + v/c^2}{1 + vd} \qquad (10b)$$

which at this stage does not yet possess any physical significance.

From (8), (9) and (10a) there result the following facts, always present in the deduction of the Lorentz Transformations.

Let us fix our attention, along the time, on a point x_o of the x axis.

We shall have, successively:

* Reference [1].

$$x = \text{const.}^{\circ} = x_o, \quad \Delta x = o, \quad u = o, \quad U = v$$

which is interpreted in S (X, Y, Z, T) in the following way:

s (x, y, z, t) is animated with a velocity v relatively to S (X, Y, Z, T).

If we fix $X = X_o$, we would obtain $u = -v$

*
* *

Let us know make a different experiment.

Let us concentrate our attention, along the x axis, on an instant t_o of the coordinate time of s (x, y, z, t).

We shall have, successively,

$$t = \text{const.}^{\circ} = t_o, \quad \Delta t = o, \quad d = o, \quad D = v/c^2$$

which is interpreted in S (X, Y, Z, T) in the following way:

s (x, y, z, t) is animated with a desynchronization v/c^2 relatively to S (X, Y, Z, T).

If we fix $T = T_o$, we would obtain $d = -v/c^2$.

This symmetry is, like in the case of the velocities, in perfect agreement with the principles of Relativity.

*
* *

This being the case, to say that s (x, y, z, t) is animated with a velocity v in relation to S (X, Y, Z, T) is as legitimate and equivalent a statement as to say that s (x, y, z, t) is animated with desynchronization v/c^2 in relation to S (S, Y, Z, T).

The first statement is present in the Galilei Transformation whereas the second is not: they are, nevertheless, equivalent.

An immediat result of this is an assymetry in this transformation, that is: singular treatement for variable time which then assumed absolute character.

*
* *

For such ideas to materialize it will become necessary to conceive experiments whereby the measurement of desynchronization will become accessible. In fact, a measurement that can be effected as naturally as the relative velocity v.

For the measurement of velocity v let us take on x_o a source of light which emits along the time a flash of a physically infinitesimal duration in relation to the periods of repetition.

In S (S, Y, Z, T) the successions

$$T_{oo}, T_{o1}, X_{o2} \ldots$$

$$X_{oo}, X_{o1}, X_{o2} \ldots$$

can be observed, where

$$\frac{X_{01} - X_{00}}{T_{01} - T_{00}} = \frac{X_{02} \quad X_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \ldots\ldots = v \qquad (11)$$

In order to measure the desynchronization it will suffice to synchronize n sources along the x axis in such a way that they will be triggered simultaneously at instant t_o, producing n flashes at the time.

In S (X, Y, Z, T) we will observe the successions

$$X_{oo}, X_{o1}, T_{o2} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_{oo}, T_{o1}, X_{o2} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

where

$$\frac{T_{01} - T_{00}}{X_{00} - X_{01}} = \frac{T_{02} - T_{01}}{X_{02} - X_{01}} = \ldots\ldots = v/c^2 \qquad (12)$$

The question becomes even more interesting if we take, as previously, $c = 1$.

In this case velocities and desynchronization are adimensional physical values and the relative velocity and relative desynchronization are measured by the same figure «v».

*
* *

However, attention must be drawn to the fact that whereas in the first experiment it would be possible for a material particle to travel along the X axis, accompanyng at each T_{ok} instant the X_{ok} image, in the second experiment this is not possible. To a desynchronization

$$D = v/c^2 < c$$

there would correspond a velocity

$$U = c^2/v > c$$

But recording clocks in X_{oo} X_{o1} $X_{o2} \ldots$ would register T_{oo} T_{o1} $T_{o2} \ldots$ and would reveal a history with a chronology where each event could never be accompanied by the same particle, even if this particle were a photon.

The experiment, however, is feasible exactly as it was conceived since there is no difficulty in provoking in s (x, y, z, t) simultaneous flashes of n sources nor is there any intrinsic difficulty in the conception of recording clocks.

Ultimately this means that the straight lines $X = X(T)$ in the first experiment are time-like whereas in the seccond they are space-like.

*
* *

Bearing all this in mind and assuming $c = 1$, the expressions (10 a) and (10 b) are converted into

$$U = \frac{u + v}{1 + uv} \qquad (13a)$$

$$D = \frac{d + v}{1 + dv} \qquad (13b)$$

With regard to the first of these expressions, we can formulate the following problem:

Determine the velocity $-u_1$ in s (x, y, z, t) which can be transformed into a velocity u_1 in S (X, Y, Z, T).

It is obvious that the problem can be solved.

From (13 a) this velocity can be determined by imposing

$$[U] = +u_1 \qquad [u] = -u_1$$

Hence

$$u_1 = \frac{-u_1 + v}{1 - u_1 v} \qquad (14)$$

Since the desynchronization composition law is the same, the following problem is immediately solved:

Determine a desynchronization $-d_1$ in s (x, y, z, t) which will lead to a desynchronization d_1 in S (X, Y, Z, T).

Furthermore, the equation which solves this problem is the equation

$$d_1 = \frac{-d_1 + v}{1 - d_1 v} \qquad (15)$$

formally identical with (14) and resulting from (13 b) where we imposed

$$[D] = +d_1 \qquad [d] = -d_1$$

Since (14) and (15) are second degree equations it follows that the correct solution is in (14)

$$u_1 < v$$

and in (15)

$$d_1 < v$$

As it would be expected, the other solutions

$$u_2 > v$$

or

$$d_2 > v$$

represent, by their inverse, the solution for the problem of desynchronizations in terms of velocities and the resolution of the problem of the velocities in terms of desynchronizations.

*
* *

Solving equations (14) and (15) we obtain

$$u_1 = d_1 = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} = \tan \psi/2$$

Since straight lines of the form

$$T = MX + T_0$$

and

$$T = M\ (X - X_0)$$

were used, the slopes of the straight lines of velocity, $\pm u_1$, are given by

$$\pm M_2 = \pm \frac{1}{M_1} = \pm \frac{\beta\gamma}{\gamma - 1} = \pm \frac{\gamma + 1}{\beta\gamma} = \pm \operatorname{cotan} \psi/2$$

whereas the slopes of the straight lines of desynchronization $\pm d_1$ are given by

$$\pm M_1 = \pm \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} = \pm \tan \psi/2$$

which coincides with the expressions (6)

*
* *

In this way the straight lines r_x and R_x represent the result of the following and easily conceivable experiment:

Let us establish in s (x, y, z, t) a chronology of events with $-d_1$ desynchronization (it will suffice to tell the history toward the past); S (X, Y, Z, T) will then show a chronology of events ordered inversely in accordance with d_1 desynchronization.

The straight lines r_t and R_t represent, in their turn, the result of the following experiments:

Let us put in s (x, y, z, t) a particle travelling along the x axis at a $-u_1$ velocity; this particle will be observed in S (X, Y, Z, T) travelling at a u_1 velocity along the X axis.

These experiments are graphically represented in Fig. 4.

*
* *

This subject will soon be taken up in a publication.

For the time being we have just tried to give physical contents to each one of the pairs

$$[r_x, R_x] \quad \text{and} \quad [r_t, R_t]$$

which represent in themselves a feasible experiment in regard to the measurable concept of desynchronization and the more trivial and corresponding concept of velocity.

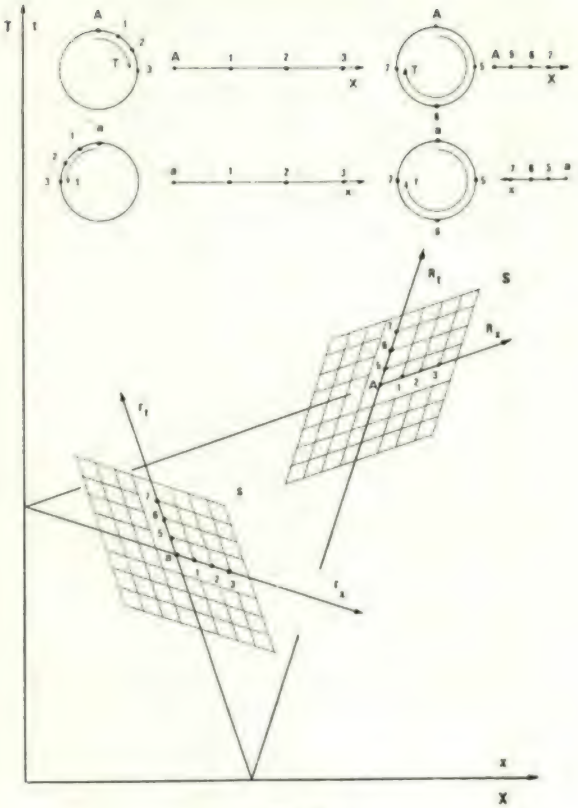


Fig. 4

To the sequences [a, 5, 6, 7] and [A, 5, 6, 7] there correspond, respectively, velocities — u_1 and + u_1. To the sequences [a, 1, 2, 3] and [A, 1, 2, 3] there correspond, respectively desynchronizations — d_1 and + d_1

IV. MECHANIZATION OF THE METHOD

Let us take two triangular plates, of aperture ψ, overlapping and with their vertices sliding along the coordinate axes: if one of the intersections (r_x, r_t) is made to follow point [x, t], evolution [X, T] is immediately obtained. Conversely, if intersections [R_x, R_t] are made to follow [X, T], evolution [X, t] is reproduced.

In Fig. 5 the method is clarified in relation to two possible situations.

From now on it becomes easy to conceive analogical and automatic processes to visualize relativistic effects and arrive at an automatic drawing of

$$T = T\ (X) \qquad Y = Y\ (X) \qquad Z = Z\ (X)$$

knowing

$$t = t\ (x) \qquad y = y\ (x) \qquad z = z\ (x)$$

V. FINAL CONCLUSION

The method presented represents a geometrical method to obtain Lorentz Transformations.

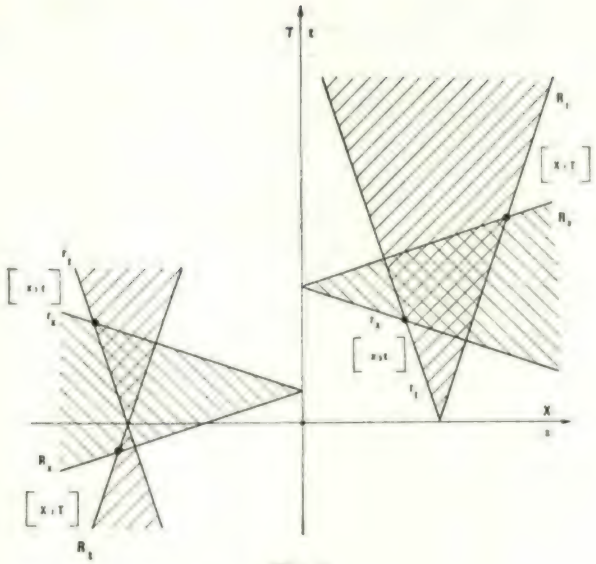


Fig. 5

From overlapping plates of aperture ψ with their vertices sliding along the coordinate axes, results a mechanical procedure establishing the relation between [x, t] and [X, T]

Since the coordinate axes are made to coincide, the concept is different from that of the Minkowsky, Synge, Amar, Loedel and Brehme diagrams.

In fact, these authors obtain the transformations on the basis of the determination, on non-coinciding axes, of the coordinates X and T or x and t.

In our case, the axes coincide and the phenomena are presented without distortion, exactly as they can be «seen» by the observers of both of the inertial frames.

We believe the facility with which the method can be mechanized will serve an easy handling of the Lorentz Transformations and, consequently, an apprehension of the relations in the space-time continuum.

The method has already proved to be rather useful and quick in the resolution of problems connected with the propagation of electromagnetic waves such as the study of aberration of light, Doppler effect, etc.

The method in question also allows an easy interpretation of infinitesimal transformations, namely that of the significance and criterium of the quasi-validity of the Galilei Transformation.

REFERENCES:

1 — Abreu Faro, M. J.: Método geométrico de obtenção das Transformações de Lorentz. Propriedades do método e suas aplicações. Academia de Ciências de Lisboa — Classe de Ciências. Comunicação de 6-5-1976.

2 — Amar, H.: New Geometric Representation of the Lorentz Transformation. Am. J. Phys. 23: 487, (1955).

3 — Brehme, R. W.: A Geometric Representation of Galilei and Lorentz Transformations. Am. J. Phys. 30: 489, (1962).

4 — Brehme, R. W.: Geometric Representations of the Lorentz Transformation — Am. J. Phys. 32: 233, (1964).

5 — Loedel, E.: Aberration y Relatividad. Anales de la Sociedade Argentina. 145: 3, (1948).

6 — Loedel, E.: Geometric Representation of the Lorentz Transformation. Am. J. Phys. 25: 327, (1957).

7 — Shadowitz, A.: Special Relativity, (W. B. Saunders, Philadelphia — London — Toronto, (1969).

8 — Synge, J. L.: Relativity: The Special Theory North Holland Publishing Company, Amsterdam, (1965).

MAGUE

«Pórtico rolante eléctrico de 500 t/150 m em serviço nos Estaleiros Navais da Setenave em Setúbal.»

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS — *Projecto e fabrico*

TURBINAS HIDRÁULICAS — *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*

TURBINAS A VAPOR — *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*

CALDEIRAS A VAPOR — *Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*

EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

INDUSTRIAIS TEXTEIS

PARA OS VOSSOS MANCHONS, FLANELAS, TRANSPORTADORES,
E TODOS OS TECIDOS TÉCNICOS

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

Consultem:

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FABRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

PÓRTICOS DE GRANDE VÃO

Pórticos até 22,00 m de vão e pilares até 9,00 m de altura, afastados de 12,00 m no interior e de 6,00 m no perímetro exterior. As fundações são mínimas devido ao baixo peso da estrutura (≃ 60 kg/m2). São possíveis adaptações para pontes rolantes.

materiais novobra

A mais vasta gama em pré-fabricados de betão

Pré-fabricação total ou parcial · Pavimentos · Coberturas · Asnas · Perfis especiais
Post-Esforço «Losinger» · Pontões · Vigas de grande vão · Pórticos «Crendon»
Pórticos «Guiraudie & Auffeve» · Pavimento «Trief» · Protecção de segurança «Trief»
Mosaicos · Garagens · Tubos · Blocos de Leca · Espaçadores de Betão
Estacas para Vinhas e Pomares · Travessas para Caminhos de Ferro

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda e Moita.
Stands de exposição em: Aveiro, Évora e Faro
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100, 5.º - Dto. - Lisboa 5
Telefones - Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 · Telex: 18375 Novoba P
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8 - 71 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

MEXIA HEITOR E BRASÃO FARINHA

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

TECNICA
revista da associação dos estudantes do Instituto Superior Técnico
LISBOA

C. D. U. 512.8.001.2

Algumas reflexões sobre representações matriciais de grupos de transformações

por J. C. CONTE
(Investigador do IAC. Prof. aux. equip. no IST)
Centro de Química Física Molecular
Complexo Interdisciplinar
Instituto Superior Técnico

RESUMO

Dado um grupo de transformações e um conjunto de funções linearmente independentes discute-se o modo como, tomando como base as funções referidas, deve ser definido um conjunto de matrizes constituindo um grupo isomorfo do grupo de transformações.

ABSTRACT

Given a transformation group and a set of linearly independent functions, the method by which a set of matrices which forms a group isomorphous with the transformation group must be defined is discussed.

1 — Admitamos que, dado um conjunto ψ_1, ψ_2, ψ_3, de funções e uma transformação A de um grupo de transformações, a matriz associada a A quando as funções são tomadas como base se define por (1).

$$A\psi_i = \sum_k^3 \psi_k a_{ki} \tag{1}$$

em que a_{ki} é o elemento genérico da matriz indicada, matriz que designaremos por Γ (A).

Desenvolvendo a expressão anterior para o caso das 3 funções ψ_1, ψ_2, ψ_3, vem

$$\begin{aligned} A\psi_1 &= a_{11}\,\psi_1 + a_{21}\,\psi_2 + a_{31}\,\psi_3 \\ A\psi_2 &= a_{12}\,\psi_1 + a_{22}\,\psi_2 + a_{32}\,\psi_3 \\ A\psi_3 &= a_{13}\,\psi_1 + a_{23}\,\psi_2 + a_{33}\,\psi_3 \end{aligned} \tag{2}$$

De acordo com esta convenção de escrita, o conjunto ψ_i deve ser entendido como uma matriz linha e a multiplicação dessa matriz pela matriz associada a A deve ser escrita sob a forma

$$\begin{aligned} A\,(\psi_1\ \psi_2\ \psi_3 &= (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11}\,\psi_1 + a_{21}\,\psi_2 + a_{31}\,\psi_3 \quad a_{12}\,\psi_1 + a_{22}\,\psi_2 + \\ &\quad + a_{32}\,\psi_3 \quad a_{13}\,\psi_1 + a_{23}\,\psi_2 + a_{33}\,\psi_3) \end{aligned} \tag{3}$$

Se em vez da transformação A tivermos as transformações B e C será analogamente

$$B\psi_i = \sum_k^3 \psi_k b_{ki} \tag{4}$$

$$C\psi_i = \sum_k^3 \psi_k c_{ki} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} B\,(\psi_1\,\psi_2\,\psi_3) &= (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ &= (b_{11}\,\psi_1 + b_{21}\,\psi_2 + b_{31}\,\psi_3 \quad b_{12}\,\psi_1 + b_{22}\,\psi_2 + \\ &\quad + b_{32}\,\psi_3 \quad b_{13}\,\psi_1 + b_{23}\,\psi_2 + b_{33}\,\psi_3) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} C\,(\psi_1\,\psi_2\,\psi_3) &= (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \\ &= (c_{11}\,\psi_1 + c_{21}\,\psi_2 + c_{31}\,\psi_3 \quad c_{12}\,\psi_1 + c_{22}\,\psi_2 + \\ &\quad + c_{32}\,\psi_3 \quad c_{13}\,\psi_1 + c_{23}\,\psi_2 + c_{33}\,\psi_3) \end{aligned} \tag{7}$$

Suponhamos que as transformações A, B e C estão ligadas pela relação

$$C = BA \tag{8}$$

Isto significa, de acordo com a convenção habitual, que aplicando a uma função a transformação A e ao resultado a transformação B se obtém o mesmo resultado final que se obtém aplicando directamente a transformação C.

Apliquemos à expressão (3) a transformação B. Entrando com a matriz de transformação $\Gamma(B)$ definida em (6) tem-se, identificando o resultado com (7)

$$BA\,(\psi_1\,\psi_2\,\psi_3) = (a_{11}\psi_1 + a_{21}\psi_2 + a_{31}\psi_3 \quad a_{12}\psi_1 + a_{22}\psi_2 + a_{32}\psi_3 \quad a_{13}\psi_1 + a_{23}\psi_2 + a_{33}\psi_3) \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \tag{9}$$

$$= (c_{11}\psi_1 + c_{21}\psi_2 + c_{31}\psi_3 \quad c_{12}\psi_1 + c_{22}\psi_2 + c_{32}\psi_3 \quad c_{13}\psi_1 + c_{23}\psi_2 + c_{33}\psi_3)$$

em que

$$\begin{aligned}
c_{11}\psi_1 + c_{21}\psi_2 + c_{31}\psi_3 &= (a_{11}\psi_1 + a_{21}\psi_2 + a_{31}\psi_3)\,b_{11} \\
&\quad + (a_{12}\psi_1 + a_{22}\psi_2 + a_{32}\psi_3)\,b_{21} \\
&\quad + a_{12}\psi_1 + a_{23}\psi_2 + a_{33}\psi_3)\,b_{31} \\
c_{12}\psi_1 + c_{22}\psi_2 + c_{32}\psi_3 &= (a_{11}\psi_1 + a_{21}\psi_2 + a_{31}\psi_3)\,b_{12} \\
&\quad + (a_{12}\psi_1 + a_{22}\psi_2\psi_2 + a_{32}\psi_3)\,b_{22} \\
&\quad + (a_{13}\psi_1 + a_{23}\psi_2 + a_{33}\psi_3)\,b_{32} \\
c_{13}\psi_1 + c_{23}\psi_2 + c_{33}\psi_3 &= (a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 + a_{31}\psi_3)\,b_{13} \\
&\quad + (a_{12}\psi_1 + a_{22}\psi_2 + a_{32}\psi_3)\,b_{23} \\
&\quad + (a_{13}\psi_1 + a_{23}\psi_2 + a_{33}\psi_3)\,b_{33}
\end{aligned} \tag{10}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
c_{11}\psi_1 + c_{21}\psi_2 + c_{31}\psi_3 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})\,\psi_1 \\
&\quad + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})\,\psi_2 \\
&\quad + (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})\,\psi_2 \\
c_{12}\psi_1 + c_{22}\psi_2 + c_{32}\psi_3 &= (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})\,\psi_1 \\
&\quad + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})\,\psi_2 \\
&\quad + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})\,\psi_3 \\
c_{13}\psi_1 + c_{23}\psi_2 + c_{33}\psi_3 &= (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33})\,\psi_1 \\
&\quad + (a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{31})\,\psi_2 \\
&\quad + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33})\,\psi_3
\end{aligned} \tag{11}$$

De modo genérico tem-se

$$c_{ij} = \sum_k^3 a_{ik}\,b_{kj} \tag{12}$$

o que mostra que

$$\Gamma(C) = \Gamma(A)\,\Gamma(B) \tag{13}$$

ou seja que a matriz associada a C se obtém multiplicando as matrizes associadas a A e B, pela ordem A — B, em contraste com a ordem B — A do produto das transformações indicado em (8).

Como é óbvio pode chegar-se a este mesmo resultado usando as expressões de definição (1), (4) e (5). Na verdade por aplicação da transformação A às funções ψ_i obtém-se, de acordo com a definição (1) funções ϕ_i dadas por

$$\phi_i = \sum_k^3 \psi_k\,a_{ki} \tag{14}$$

Se aplicarmos agora B às funções ϕ_i obtém-se funções χ_i dadas por

$$\chi_i = \sum_j \phi_j\,b_{ji} \tag{15}$$

Mas de acordo com (14)

$$\phi_j = \sum_k \psi_k\,a_{kj} \tag{16}$$

Substituindo (16) em (15) vem

$$\chi_i = \sum_j \sum_k \psi_k\,a_{kj}\,b_{ji} = \sum_k \psi_k \left(\sum_j a_{kj}\,b_{ji}\right) \tag{17}$$

ou seja

$$\chi_i = \sum_k \psi_k\,c_{ki} \tag{18}$$

com

$$c_{ki} = \sum_k a_{kj}\,b_{ji} \tag{19}$$

de acordo com (12) e (13)

Consideremos no entanto de novo a expressão (1)

$$A\psi_i = \sum_k \psi_k\,a_{ki} \tag{20}$$

Se aplicarmos a transformação B vem

$$BA\psi_i = B\left(\sum_k \psi_k\,a_{ki}\right) = \sum_k B\psi_k\,a_{ki} \tag{21}$$

Se atendermos a (4) pode escrever-se

$$B\psi_k = \sum_j \psi_j \, b_{jk} \qquad (22)$$

Substituindo (22) em (21) obtém-se

$$BA\psi_i = \sum_k \sum_j \psi_j \, b_{jk} \, a_{ki}$$

$$= \sum_j \psi_j \left(\sum_k b_{jk} \, a_{ki} \right) \qquad (23)$$

Este resultado parece mostrar, ao contrário do resultado a que se chegou anteriormente que o efeito global da aplicação da transformação A seguida da aplicação da transformação B é traduzido por uma matriz de transformação que se pode obter a partir do produto das matrizes de transformação associadas a B e A, por esta ordem.

2 — Vejamos se é possível compreender a causa desta aparente contradição. Ao usar expressão (1), ela deve ser entendida de uma forma simbólica, e exprimindo o facto de que por aplicação da transformação A à função ψ_i do conjunto ψ_1, ψ_2, ψ_3, se obtém uma nova função, combinação linear das funções ψ_1, ψ_2, ψ_3. Os coeficientes dessas combinações lineares podem ser agrupados constituindo uma matriz, que será, por definição, a matriz associada à transformação A que se designa por $\Gamma(A)$. Tal como está apresentada, a definição (1) implica que as funções ψ_i se devem entender como formando uma matriz linha. Por seu turno a matriz $\Gamma(A)$ deverá ser uma matriz quadrada, de ordem 3 (igual ao número de funções ψ_i que constituem a base de representações). Para se poder efectuar a multiplicação das matrizes da forma habitual é necessário escrever primeiro a matriz das funções ψ_i e depois $\Gamma(A)$. Nessas condições é lógico que se escreva, na verdade, o somatório do 2.º membro da expressão (1) sob a forma $\sum_k \psi_k \, a_{ki}$.

Mas nesse caso, para manter a convenção, parece ser melhor, escrever, de modo simbólico

$$\psi_i \, A = \sum_k \psi_k \, a_{ki} \qquad (24)$$

com a convenção que o primeiro membro significa a aplicação de A a ψ. Ter-se-ia então simbolicamente

$$(\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3) \, A = (\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3) \, \Gamma(A) \qquad (25)$$

Se agora aplicarmos a transformação B deve usar-se a mesma convenção. Em termos matriciais já se viu (cfr. expressão 17) que aparece o produto das matrizes pela ordem A — B. Em termos de operadores, e na sequência da equação (25), deve escrever-se a transformação B à direita, embora se deva admitir que a operação se efectua da «direita para a esquerda», isto é, aplicando primeiro A e depois B. De qualquer modo escrever-se-á, simbolicamente

$$(\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3) \, AB = (\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3) \, \Gamma(A) \, \Gamma(B) \qquad (26)$$

Este resultado parece mostrar que do ponto de vista simbólico a aplicação da transformação A seguida da aplicação da transformação B deve ser escrita sob a forma AB, colocada à direita das funções ψ_i. Essa transformação global (que pode continuar a ser designada por C) teria uma matriz associada $\Gamma(C)$, produto das matrizes associadas a A e B, pela ordem A — B, ou seja, a ordem inversa da aplicação das transformações. A expressão (26) escrever-se-ia então

$$(\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3) \, C = (\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3) \, \Gamma(C) \qquad (27)$$

com

$$C = AB \qquad (28)$$

que substituiria (8) embora continuando a significar o mesmo que (8), isto é, que C é a transformação que aplicada a uma dada função tem o mesmo efeito que a aplicação de A seguida da aplicação de B.

3 — Neste conjunto de raciocínios há contudo um ponto importante que importa esclarecer. Como se sabe, a matriz associada a uma transformação depende do conjunto de funções de base que se considera.

Ora ao escrever a expressão (14) admitiu-se que ao aplicar B às funções ϕ_i (que, recorde-se, tinham sido obtidas por aplicação de A às funções ψ_i) a matriz de transformação $\Gamma(B)$ era a que tinha sido obtida quando as funções ψ_i eram usadas como base (cfr. expressão (4)).

Atendendo às expressões (2) e ao significado das funções ψ_i pode escrever-se

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_{11}\psi_1 + a_{21}\psi_2 + a_{31}\psi_3 \\ \phi_2 &= a_{12}\psi_1 + a_{22}\psi_2 + a_{32}\psi_3 \\ \phi_3 &= a_{13}\psi_1 + a_{23}\psi_2 + a_{33}\psi_3 \end{aligned} \qquad (29)$$

Quando se aplica B às funções $(\phi_1 \; \phi_2 \; \phi_3)$ tem-se

$$\begin{aligned} B\phi_1 &= a_{11}B\psi_1 + a_{21}B\psi_2 + a_{31}B\psi_3 \\ B\phi_2 &= a_{12}B\psi_1 + a_{22}B\psi_2 + a_{32}B\psi_3 \\ B\phi_3 &= a_{13}B\psi_1 + a_{23}B\psi_2 + a_{33}B\psi_3 \end{aligned} \qquad (30)$$

Mas de acordo com (4)

$$\begin{aligned} B\psi_1 &= b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2 + b_{31}\psi_3 \\ B\psi_2 &= b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2 + b_{32}\psi_3 \\ B\psi_3 &= b_{13}\psi_1 + b_{23}\psi_2 + b_{33}\psi_3 \end{aligned} \qquad (31)$$

Substituindo (31) em (30) vem

$$
\begin{aligned}
B\,\phi_1 &= a_{11}(b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2 + b_{31}\psi_3) + a_{21}(b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2 + \\
&\quad + b_{32}\psi_3) + a_{31}(b_{13}\psi_1 + b_{23}\psi_2 + b_{33}\psi_3) \\
B\,\phi_2 &= a_{12}(b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2 + b_{31}\psi_3) + a_{22}(b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2 + \\
&\quad + b_{32}\psi_3) + a_{32}(b_{13}\psi_1 + b_{23}\psi_2 + b_{33}\psi_3) \qquad (32) \\
B\,\phi_3 &= a_{13}(b_{11}\psi_1 + b_{21}\psi_2 + b_{31}\psi_3) + a_{23}(b_{12}\psi_1 + b_{22}\psi_2 + \\
&\quad + b_{32}\psi_3) + a_{33}(b_{13}\psi_1 + b_{23}\psi_2 + b_{33}\psi_3)
\end{aligned}
$$

ou de outro modo,

$$
\begin{aligned}
B\,\phi_1 &= \Big(\sum_k a_{k1}\, b_{1k}\Big)\psi_1 + \Big(\sum_k a_{k1}\, b_{2k}\Big)\psi_2 + \Big(\sum_k a_{k1}\, b_{3k}\Big)\psi_3 \\
B\,\phi_2 &= \Big(\sum_k a_{k2}\, b_{1k}\Big)\psi_1 + \Big(\sum_k a_{k2}\, b_{2k}\Big)\psi_2 + \Big(\sum_k a_{k2}\, b_{3k}\Big)\psi_3 \qquad (33) \\
B\,\phi_3 &= \Big(\sum_k a_{k3}\, b_{1k}\Big)\psi_1 + \Big(\sum_k a_{k3}\, b_{2k}\Big)\psi_2 + \Big(\sum_k a_{k3}\, b_{3k}\Big)\psi_3
\end{aligned}
$$

Este não é ainda o resultado final que se pretende, uma vez que para determinar a matriz associada a B quando setomam como base as funções ϕ_i é necessário saber qual o resultado da aplicação de B às funções ϕ_i expresso sob a forma de combinações lineares das funções ϕ_i. Para isso é evidentemente preciso exprimir as funções ψ_i em função das funções ϕ_i

Ora as equações (29) podem exprimir-se em linguagem matricial. Como é óbvio, deve escrever-se ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 assim como ψ_1, ψ_2, e ψ_3 sob a forma de matrizes linha.

$$
(\phi_1\ \phi_2\ \phi_3) = (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (34)
$$

Isto é

$$
(\phi_1\ \phi_2\ \phi_3) = (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3)\,\Gamma(A) \qquad (35)
$$

Assim sendo, para exprimir os ψ_i em termos dos ϕ_i basta usar a matriz inversa de $\Gamma(A)$ que representaremos por $\Gamma^{-1}(A)$. Tem-se

$$
(\psi_1\ \psi_2\ \psi_3) = (\phi_1\ \phi_2\ \phi_3)\,\Gamma^{-1}(A) \qquad (36)
$$

Por outro lado, as expressões (33) podem escrever-se sob forma matricial

$$
B(\phi_1\ \phi_2\ \phi_3) = (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3)\begin{pmatrix} \sum_k b_{1k}\, a_{k1} & \sum_k b_{1k}\, a_{k2} & \sum_k b_{1k}\, a_{k3} \\ \sum_k b_{2k}\, a_{k1} & \sum_k b_{2k}\, a_{k2} & \sum_k b_{2k}\, a_{k3} \\ \sum_k b_{3k}\, a_{k1} & \sum_k b_{3k}\, a_{k2} & \sum_k b_{3k}\, a_{k3} \end{pmatrix} \qquad (37)
$$

Isto é, por definição das matrizes $\Gamma(B)$ e $\Gamma(A)$

$$
B(\phi_1\ \phi_2\ \phi_3) = (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3)\,\Gamma(B)\,\Gamma(A) \qquad (38)
$$

Substituindo agora (36) vem

$$
B(\phi_1\ \phi_2\ \phi_3) = (\phi_1\ \phi_2\ \phi_3)\,\Gamma^{-1}(A)\,\Gamma(B)\,\Gamma(A) \qquad (39)
$$

Este resultado é importante e mostra que quando se usam como funções de base as funções ϕ_i a matriz que deve ser associada à transformação B não é $\Gamma(B)$ (definida em (4)) e que é a matriz associada à transformação B quando as funções ψ_i são usadas como base, mas sim a matriz $\Gamma'(B)$ dada, de acordo com (39), por

$$
\Gamma'(B) = T^{-1}(A)\ \Gamma(B)\ \Gamma(A) \qquad (40)
$$

Nestas circunstâncias, em (9) não se deve usar a matriz $\Gamma(B)$ mas sim a matriz $\Gamma'(B)$ de elementos

$$
b'_{ij} = \sum_{km} a^{-1}_{ik}\ b_{km}\ a_{mj} \qquad (41)
$$

sendo a^{-1}_{ik} o elemento genérico da matriz $\Gamma^{-1}(A)$ (que não é evidentemente, o inverso do elemento a_{ik}). Daqui decorre que (12) deve ser substituída por

$$
c'_{ij} = \sum_k^3 a_{ik}\ b'_{kj} \qquad (42)
$$

ou seja, em vez de (13) deve escrever-se

$$
\Gamma'(C) = \Gamma(A)\,\Gamma'(B) \qquad (43)
$$

Substituindo o valor de $\Gamma'(B)$ dado por (40) vem

$$
\Gamma'(C) = \Gamma(A)\ \Gamma^{-1}(A)\ \Gamma(B)\ \Gamma(A)
$$

ou seja

$$
\Gamma'(C) = \Gamma(B)\ \Gamma(A) \qquad (44)
$$

o que está de acordo com (8).

Do mesmo modo, em (15), (17) e (19) os elementos b_{ji} devem ser substituídos por b'_{ji}. Nessas condições a expressão (19) deve ser substituída por

$$
c_{kl} = \sum_j a_{kj}\ b'_{jl} \qquad (45)
$$

Atendendo a (41) tem-se agora

$$
c'_{kl} = \sum_j \sum_l \sum_m a_{kj}\ a^{-1}_{jl}\ b_{lm}\ a_{mi} \qquad (46)
$$

Por definição de matriz inversa

$$
\sum_j a_{kj}\ a^{-1}_{jl} = \delta_{kl} \qquad (47)
$$

o que mostra que

$$c'_{kj} = \sum_m b_{km}\, a_{mi} \qquad (48)$$

em concordância com (44).

É claro que nesta base se compreende que as expressões (20) a (23) estão perfeitamente correctas desde que se entenda, como está indicado em (22) que a transformação B se aplica a ψ. Considere-se na verdade de novo o conjunto de expressões (3)

$$A\,(\psi_1\psi_2\psi_3) = (\psi_1\psi_2\psi_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (49)$$

$$= (a_{11}\psi_1 + a_{21}\psi_2 + a_{31}\psi_3 \quad a_{12}\psi_1 + a_{22}\psi_2 + a_{32}\psi_3 \quad a_{13}\psi_1 + a_{23}\psi_2 + a_{33}\psi_3)$$

Admitamos que se multiplica o 2.º membro à direita pela matriz $\Gamma(B)$ não à maneira habitual, o que equivaleria a multiplicar a matriz

$$(\phi_1\, \phi_2\, \phi_3)$$

mas multiplicando as funções ψ_i. Obtém-se a matriz linha seguinte (que se escreve, por facilidade de escrita, sob a forma de matriz transposta de uma matriz coluna)

$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}\psi_1 + a_{11}b_{21}\psi_2 + a_{11}b_{31}\psi_3 + a_{21}b_{12}\psi_3 + a_{27}b_{22}\psi_2 + a_{21}b_{32}\psi_3 + a_{31}b_{13}\psi_3 + a_{31}b_{23}\psi_2 + a_{31}b_{33}\psi_3 \\ a_{12}b_{11}\psi_1 + a_{12}b_{21}\psi_2 + a_{12}b_{31}\psi_3 + a_{22}b_{12}\psi_1 + a_{22}b_{22}\psi_2 + a_{22}b_{32}\psi_3 + a_{32}b_{13}\psi_1 + a_{32}b_{23}\psi_2 + a_{33}b_{33}\psi_3 \\ a_{13}b_{11}\psi_1 + a_{13}b_{21}\psi_2 + a_{13}b_{31}\psi_3 + a_{23}b_{12}\psi_1 + a_{23}b_{22}\psi_2 + a_{23}b_{32}\psi_3 + a_{33}b_{13}\psi_1 + a_{33}b_{23}\psi_2 + a_{33}b_{33}\psi_3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{tr} \begin{pmatrix} \psi_1 \sum b_{1k}a_{k1} + \psi_2 \sum b_{2k}a_{k1} + \psi_3\, b_{3k}a_{k1} \\ \psi_1 \sum b_{1k}a_{k2} + \psi_2 \sum b_{2k}a_{k2} + \psi_3\, b_{3k}a_{k2} \\ \psi_1 \sum b_{1k}a_{k3} + \psi_2 \sum b_{2k}a_{k3} + \psi_3\, b_{3k}a_{k3} \end{pmatrix}$$

$$= (\psi_1\psi_2\psi_3) \begin{pmatrix} \sum b_{1k}a_{k1} & \sum b_{1k}a_{k2} & \sum b_{1k}a_{k3} \\ \sum b_{2k}a_{k1} & \sum b_{2k}a_{k2} & \sum b_{2k}a_{k3} \\ \sum b_{3k}a_{k1} & \sum b_{3k}a_{k2} & \sum b_{3k}a_{k3} \end{pmatrix}$$

ou seja, obtém-se, como seria de esperar,

$$(\psi_1\psi_2\psi_3)\ \Gamma(B)\ \Gamma(A)$$

Justifica-se assim que se escreva, agora, e em pleno acordo com (23)

$$BA\ (\psi_1\psi_2\psi_3) = (\psi_1\psi_2\psi_3)\ \Gamma(B)\ \Gamma(A) \qquad (50)$$

4 — Podemos agora resumir as conclusões a que chegámos. Se considerarmos três transformações A, B, C, de um grupo de transformações, podemos definir as matrizes $\Gamma(A)$, $\Gamma(B)$ e $\Gamma(C)$ associadas a essas transformações quando se toma como base um dado conjunto de funções ψ, através de relações de forma (1), em que as funções ψ se agrupam formando uma matriz linha, eventualmente multiplicada à direita pela matriz associada a cada uma das transformações.

Se entre as transformações A, B e C existe a relação (cfr. (8))

$$C = BA \qquad (51)$$

então a matriz associada a C, $\Gamma(C)$, que provoca nas funções ψ o efeito equivalente ao de aplicar A às funções ψ e em seguida ao resultado aplicar B, está relacionada com as matrizes $\Gamma(A)$ e $\Gamma(B)$ associadas a A e B, respectivamente, e calculadas tomando como base as funções ψ, através da relação

$$\Gamma(C) = \Gamma(A)\ \Gamma(B) \qquad (52)$$

o que corresponde a multiplicar as matrizes pela ordem inversa da aplicação das transformações.

Uma análise mais profunda do problema permite mostrar no entanto que uma vez que se aplica A ao conjunto de funções ψ se obtém um novo conjunto de funções ϕ, combinação linear das funções iniciais. A matriz associada à transformação B quando a base é o cconjunto ϕ é dada por

$$\Gamma'(B) = \Gamma^{-1}(A)\ \Gamma(B)\ \Gamma(A) \qquad (53)$$

em que $\Gamma^{-1}(A)$ é o inverso da matriz $\Gamma(A)$. Nesta ordem de ideias a aplicação sucessiva da tranformação A e da transformação B às funções ψ é traduzida pela matriz $\Gamma'(C)$ dada por

$$\Gamma'(C) = \Gamma(A)\ \Gamma'(B) = \Gamma(B)\ \Gamma(A) \qquad (54)$$

sendo agora o produto das matrizes feito pela mesma ordem pela qual se aplicam as transformações. É de salientar que em rigor isto significa, em última análise que a transformação B se aplica às funções ψ, iniciais, e não ao resultado da aplicação de A ao conjunto ψ.

5 — É fácil verificar para um caso concreto que na verdade as presentes considerações estão correctas. Consideraremos por exemplo o caso do grupo C_{3v} e as seguintes transformações

C_3^2 → rotação de $2 \times 120°$ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio

σ_{xv} → reflexão no plano vertical que passa pelo eixo dos xx

σ_{uv} → reflexão no plano vertical que faz um ângulo de $+120°$ com o plano correspondente a σ_{xv}

σ_{wv} → reflexão no plano vertical que faz um ângulo de $120°$ com o plano correspondente a σ_{uv}

Se identificarmos

A com C_3^2

B com σ_{xv}

da tabela de multiplicação do grupo C_{3v} é possível extrair que

$$C = BA = \sigma_{wv} \tag{55}$$

sendo de notar que

$$AB = \sigma_{uv} \tag{56}$$

Por outro lado admitamos que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= x\, e^{-r} \\ \psi_2 &= y\, e^{-r} \\ \psi_3 &= z\, e^{-r} \end{aligned} \tag{57}$$

Nessa circunstância, o conjunto de funções ϕ_1 ϕ_2 ϕ_3, definidas em (14) e (29) é

$$\begin{aligned} C_3^2\, \psi_1 &\rightarrow \phi_1 = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) e^{-r} = -\frac{1}{2}\psi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_2 \\ C_3^2\, \psi_2 &\rightarrow \phi_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) e^{-r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 \\ C_3^2\, \psi_3 &\rightarrow \phi_3 = z\, e^{-r} = \psi_3 \end{aligned} \tag{58}$$

Então, e de acordo com a definição (1)

$$\Gamma(A) \equiv \Gamma(C_3^2) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{59}$$

Pode ainda verificar-se que

$$\Gamma(B) \equiv \Gamma(\sigma_{xv}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\Gamma(\sigma_{wv}) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$\Gamma(\sigma_{uv}) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ -\sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\Gamma(C_3) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ -\sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{63}$$

É fácil ver que

$$\Gamma^{-1}(A) \equiv \Gamma(C_3) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Atendendo a estes valores para as matrizes podem agora verificar-se as relações anteriormente deduzidas. Assim tem-se

$$\Gamma(A)\Gamma(B) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma(C) \tag{65}$$

de acordo com (52).

Por outro lado a matriz de transformação $\Gamma'(B)$ de transformação B quando se toma como base as funções ϕ é, de acordo com (53)

$$\begin{aligned} \Gamma'(B) = \Gamma^{-1}(A)\Gamma(B)\Gamma(A) &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ -\sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ -\sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{66}$$

Então o resultado global de aplicação A ao conjunto ψ e depois aplicar B, não ao resultado mas às funções ψ na sua nova configuração é

$$\Gamma(A)\Gamma(B) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ -\sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{67}$$

Este resultado pode aliás obter-se directamente de

$$\Gamma(C) = \Gamma(B)\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/2} & 0 \\ -\sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

o que está de acordo com (54).

Como é óbvio poderiam arranjar-se outros exemplos, dentro do grupo C_{3v} ou com outros grupos de transformações.

6 — É curioso observar que estas conclusões a que se chegou dependem da forma como é definida a matriz associada a uma transformação. Na realidade, a aplicação de uma dada transformação A de um grupo de transformações a um conjunto de funções ψ que eventualmente irá constituir uma base para a representação não define por si só a matriz de transformação. O que é essencial garantir para que o conjunto ψ constitua uma base adequada é que por aplicação da transformação A a cada uma das funções ψ se obtenha uma combinação linear das funções ψ. Isto é, deverá ser, se por exemplo, como temos vindo a considerar, forem três as funções ψ,

$$A\psi_1 = \lambda_1^{(1)}\psi_1 + \lambda_2^{(1)}\psi_2 + \lambda_3^{(1)}\psi_3$$

$$A\psi_2 = \lambda_1^{(2)}\psi_1 + \lambda_2^{(2)}\psi_2 + \lambda_3^{(2)}\psi_3$$

$$A\psi_3 = \lambda_1^{(3)}\psi_1 + \lambda_2^{(3)}\psi_2 + \lambda_3^{(3)}\psi_3$$

Estas expressões são perfeitamente equivalentes a (2). Simplesmente usou-se a forma (2) porque se admitiu que a matriz associada a A, $\Gamma(A)$ devia ser definida de acordo com (1), isto é, que ψ_1 ψ_2 ψ_3 formavam uma matriz linha e portanto $\Gamma(A)$ teria que aparecer como uma matriz quadrada de ordem 3, colocada à direita de

$$(\psi_1\ \psi_2\ \psi_3)$$

Nessas circunstâncias, sendo a_{ki} o elemento genérico da matriz $\Gamma(A)$ e usando a convenção habitual de o índice (k) representar a coluna e o índice (i) representar a linha dessa matriz a forma (1) de definição de $\Gamma(A)$,

$$A\psi_i = \sum_k \psi_k a_{ki} \tag{70}$$

implica a identidade de (2) e (69) ou seja

$$\lambda_k^{(i)} \equiv a_{ki} \tag{71}$$

Daqui decorrem todas as expressões anteriormente consideradas. Em particular aquelas que permitem obter o conjunto ϕ a partir do conjunto ψ e onde se manteve a convenção de considerar ψ_1, ψ_2, ψ_3 e logo ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) constituindo matrizes linha (cfr. (35) e (36)).

Suponhamos que se considera agora que ψ_1, ψ_2, ψ_3 se agrupam formando uma matriz coluna. Nessa altura a matriz associada a A deverá ser igualmente uma matriz quadrada, de ordem 3, mas que multiplica à esquerda a matriz coluna

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \tag{72}$$

É fora de dúvida que esta nova matriz deva estar relacionada com a matriz $\Gamma(A)$ já definida anteriormente. Para vermos como as matrizes associadas a A de acordo com as duas possibilidades de agrupar ψ_1, ψ_2 e ψ_3 estão relacionadas representemos por α_{ik} o elemento genérico da nova matriz. Ter-se-á agora, em vez de (1) [2]

$$A\psi_i = \sum_k \alpha_{ik}\psi_k \tag{73}$$

Desenvolvendo para os vários valores de ψ_i tem-se agora, em vez de (2)

$$\begin{aligned} A\psi_1 &= \alpha_{11}\psi_1 + \alpha_{12}\psi_2 + \alpha_{13}\psi_3 \\ A\psi_2 &= \alpha_{21}\psi_1 + \alpha_{22}\psi_2 + \alpha_{23}\psi_3 \\ A\psi_3 &= \alpha_{31}\psi_1 + \alpha_{32}\psi_2 + \alpha_{33}\psi_3 \end{aligned} \tag{73}$$

Em termos das relações (69) tem-se agora

$$\lambda_k(i) \equiv \alpha_{ik} \tag{75}$$

o que permite desde já escrever, comparando com (71), que

$$a_{ki} \equiv \alpha_{ik} \tag{76}$$

ou seja que a nova matriz associada à transformação A é a matriz transposta de $\Gamma(A)$, isto é, a matriz que se obtém trocando as linhas e colunas de $\Gamma(A)$.

Esta conclusão é aliás evidente se se atender a que a matriz transposta de um produto é o produto das matrizes transpostas escritas em ordem inversa, e que a matriz transposta de uma matriz linha é uma matriz coluna.

Na realidade, se aceitarmos a definição (73) deverá escrever-se, em vez de (3)

$$A \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\psi_1 + \alpha_{12}\psi_2 + \alpha_{13}\psi_3 \\ \alpha_{21}\psi_1 + \alpha_{22}\psi_2 + \alpha_{23}\psi_3 \\ \alpha_{31}\psi_1 + \alpha_{32}\psi_2 + \alpha_{33}\psi_3 \end{pmatrix} \tag{77}$$

Se usarmos as matrizes transpostas das indicadas em (3) deverá ter-se

$$A \operatorname{tr} (\psi_1 \psi_2 \psi_3) = \operatorname{tr} \left\{ (\psi_1 \psi_2 \psi_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\} \tag{78}$$

ou seja

$$A \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \equiv \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \tag{79}$$

o que mostra, por identificação com (77), que

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{80}$$

em perfeito acordo com (76). Seguindo a convenção habitual usaremos

$$\operatorname{tr} \Gamma(A) \equiv \widetilde{\Gamma(A)} \tag{81}$$

É claro que para duas outras transformações B e C as matrizes associadas já não serão as matrizes $\Gamma(B)$ e $\Gamma(C)$ definidas em (4) e (5) mas sim as respectivas matrizes transpostas $\widetilde{\Gamma(B)}$ e $\widetilde{\Gamma(C)}$.

Para saber como estas matrizes estão relacionadas quando entre as transformações A, B e C existe a relação (8) (ou (51)) podem repetir-se os raciocínios anteriormente feitos. A resolução do problema simplifica-se no entanto se usarmos as matrizes transpostas em (52)

$$\widetilde{\Gamma(C)} = \widetilde{\Gamma(B)}\ \widetilde{\Gamma(A)} \tag{82}$$

Este resultado mostra que quando se usa como matriz associada a uma transformação aquilo que é definido pela relação (73) e se consideram três transformações A, B e C entre as quais existe a relação

$$C = BA \tag{83}$$

então a matriz associada a C, $\widetilde{\Gamma(C)}$, que provoca nas funções ψ o efeito equivalente ao de aplicar A às funções ψ e em seguida ao resultado aplicar B está relacionada com as matrizes $\widetilde{\Gamma(A)}$ e $\widetilde{\Gamma(B)}$ associadas a A e B, respectivamente, e calculadas tomando como base as funções ψ, através da relação (82) o que corresponde a multiplicar as matrizes pela mesma ordem pela qual as transformações são aplicadas.

Como é evidente poderia chegar-se a esta conclusão repetindo as considerações traduzidas pelas equações (9) a (13) tomando como base a definição (73) em vez de (1) ou ainda usando as expressões homólogas das expressões (14) a (19).

7 — Mas tal como foi frisado anteriormente esta análise não toma em consideração o facto de que por aplicação de A ao conjunto ψ se obter um conjunto ϕ que ao ser tomado como base para definir a matriz de transformação associada a B conduz a uma matriz diferente daquela que se obtém quando a base é o conjunto ψ. Agora entre o conjunto ϕ e o conjunto ψ existe o conjunto de relações (74). Ou seja, sob forma matricial deve escrever-se, em vez de (35) e (36)

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \widetilde{\Gamma(A)} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \tag{84}$$

e

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \left[\widetilde{\Gamma(A)} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \equiv \widetilde{\Gamma^{-1}(A)} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \tag{85}$$

Estas expressões podem obter-se directamente de (35) e (36) transformando as matrizes correspondentes. Do mesmo modo se obtêm as expressões homólogas de (38) e (39)

$$B \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \Gamma(\widetilde{A})\, \Gamma(\widetilde{B}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (86)$$

$$B \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \Gamma(\widetilde{A})\, \Gamma(\widetilde{B})\, \Gamma^{-1}(A) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (87)$$

resultado que mostra que a matriz associada à transformação B quando as funções base são as funções ϕ e se usa a definição (73) é

$$\Gamma'(B) = \Gamma(\widetilde{A})\, \Gamma(\widetilde{B})\, \Gamma^{-1}(A) \quad (88)$$

Este valor da matriz associada a B conduz à expressão homóloga de (44)

$$\Gamma'(C) = \Gamma(\widetilde{A})\, \Gamma(\widetilde{B}) \quad (89)$$

quando se substitui $\Gamma(\widetilde{B})$ por $\Gamma'(B)$ em (82).

Tal como sucedia no entanto com a dedução traduzida pelas expressões (20) a (24) este resultado só é válido quando se admite que a transformação B actua sobre o conjunto ψ. É instrutivo repetir aqui esses raciocínios.

Seja com efeito α_{ik} o elemento genérico da matriz associada a A obtida com base na definição (73)

$$A\psi_i = \sum_k \alpha_{ik}\, \psi_k \quad (90)$$

Para a transformação B será igualmente, sendo β_{kj} o elemento genérico

$$B\psi_k = \sum_j \beta_{kj}\, \psi_j \quad (91)$$

Ora se aplicarmos B a (90) vem

$$BA\psi_i = \sum_k \alpha_{ik}\, B\psi_k \quad (92)$$

ou, atendendo a (91)

$$BA\psi_i = \sum_k \alpha_{ik} \sum_j \beta_{kj}\, \psi_j = \sum_j \left(\sum_k \alpha_{ik}\, \beta_{kj} \right) \psi_j \quad (93)$$

Por definição das matrizes $\Gamma(\widetilde{A})$ e $\Gamma(\widetilde{B})$ tem-se então

$$BA \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \Gamma(\widetilde{A})\, \Gamma(\widetilde{B}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (94)$$

ou seja

$$\Gamma'(\widetilde{C}) = \Gamma(\widetilde{A})\, \Gamma(\widetilde{B}) \quad (95)$$

como em (89).

8 — Para aplicar estas expressões a um caso concreto pode usar-se como anteriormente, o caso do grupo C_{3v} e o conjunto de funções $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3$ definido em (57). As relações (58) e as relações homólogas que se podem obter para as outras transformações continuam evidentemente a ser válidas. Simplesmente as matrizes associadas às várias transformações serão as transpostas das anteriormente apresentadas, como se viu com toda a generalidade em (80).

Seja então

$$\Gamma(\widetilde{A}) = \Gamma(C_3^2) = \begin{pmatrix} -1/2 & +\sqrt{3/2} & 0 \\ -\sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (96)$$

$$\Gamma(\widetilde{B}) = \Gamma(\sigma_{uv}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (97)$$

Tem-se agora

$$\Gamma(\widetilde{C}) = \Gamma(\widetilde{B})\, \Gamma(\widetilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ -\sqrt{3/2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (98)$$

de acordo com

$$\sigma_{uv}\, C_3^2 = \sigma_{wv} \quad (99)$$

como já indicado em (55).

9 — Como se vê, quando a matriz associada a uma dada transformação é definida por uma expres-

são da forma (73) a matriz que traduz o efeito da aplicação sucessiva das transformações A e B a um conjunto de funções ψ é o produto das matrizes correspondentes a A e B pela mesma ordem em que as transformações se aplicam. Essa ordem é invertida quando as matrizes associadas às transformações A, B e C são obtidas através de expressões da forma (1).

Assim sendo, é o conjunto de matrizes que se obtém com base na definição (73) que apresenta uma tabela de multiplicação idêntica à do grupo de transformações a que A, B e C pertencem. É portanto a definição (73) que deve ser escolhida quando se pretende determinar o grupo de matrizes isomorfo do grupo de transformações.

Pode argumentar-se aqui, na linha do que foi apresentado anteriormente, que uma vez que a aplicação da transformação B incide sobre um conjunto de funções que não é o conjunto inicial o que se deve usar é, não a matriz $\Gamma(B)$ (ou $\Gamma(\widetilde{B})$) mas sim a matriz $\Gamma'(B)$ (ou $\Gamma'(\widetilde{B})$). A ser assim, como se viu, deveria ser o conjunto de matrizes obtido com base na definição (1) que deveria ser usado, já que é esse que conduz a um produto das matrizes $\Gamma(A)$ e $\Gamma(B)$ pela ordem com que as transformações são aplicadas (cfr. (54)). Este argumento é contudo falacioso. Em primeiro lugar porque o problema que está em discussão é o de saber qual dos conjuntos de matrizes que se obtém tomando como base as funções ψ (usando a definição (1) ou a definição (73)) constitui um grupo isomorfo do conjunto de transformações em estudo. Em segundo lugar é de salientar que se se aceitasse o argumento seria necessário dispôr de uma matriz representando a transformação B para cada transformação A que se aplicasse inicialmente (cfr. (40) e (88)). E a aplicação de nova transformação exigiria novo conjunto de matrizes.

Se bem que os raciocínios que conduzem às equações (40) e (88) estejam perfeitamente correctos elas não respondem ao problema proposto. É na verdade o conjunto de matrizes obtidas com base em (73) que constitui o grupo isomorfo pretendido, como aliás se verifica quando se considera um caso concreto (cfr. eq. (96) — (99)).

REFERÊNCIAS

1 — Cfr. p. exemplo I. N. Levine — Molecular Spectroscopy, John Wiley 1975, p. 109.
V. HEINE — Group Theory in Quantum Mechanics, Pergamon Press, p. 95.

2 — Cfr. p. exemplo L. A. Woodward — Introduction to the theory of molecular vibrations and vibrational spectroscopy — Oxford, at the Clarendon Press, p. 109.

NÚMERO 436 NOVEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 621.3.018.757:621.317.75

Transmissão de ruído através dum dispositivo retentor de amostras [1]

J. F. BORGES DA SILVA
Doutor-Engenheiro I. S. T.
Prof. Extraordinário do I. S. T.
J. M. VIEGAS GONÇALVES
Eng. Electrotécnico I. S. T.
Assistente do I. S. T.

RESUMO

Com base num modelo apropriado dum dispositivo retentor de amostras, estabelece-se a expressão da função densidade espectral à saída, devida à presença à entrada, de flutuações com função de auto-correlação especificada.

O modelo utilizado para representar o retentor leva em linha de conta os valores não desprezáveis da constante de tempo e do tempo de captação do dispositivo.

Apresentam-se os resultados de medidas efectuadas num dispositivo real, para confirmação das previsões teóricas e ilustra-se a aplicação prática do retentor, com os resultados obtidos pelo seu uso na recuperação e reprodução da forma de curva duma grandeza variável imersa em ruído.

ABSTRACT

Based on an appropriate model of a sample-and-hold device, a theory is developed leading to an expression for the output spectral density function due to the presence at the input of fluctuations with a specified auto-correlation function.

The sample-and-hold model used takes into account the non-negligible time constant and acquisition time of the device.

Results of measurements made on a real device are presented to confirm the theoretical predictions and an applications example is described being illustrated with results obtained, using a sample-and-hold device, for the recovery and display of wave-forms buried in noise.

1. INTRODUÇÃO

O retentor de amostras (1) é um elemento de memória do domínio analógico, com larga aplicação na técnica do comando automático discreto [1] (2) e nas medidas eléctricas em geral.

Neste último domínio, encontram-se os diversos métodos de registo gráfico de fenómenos periódicos ou repetitivos baseados na amostragem, permitindo a reprodução da sua forma como funções do tempo, utilizando instrumentos registadores com reduzida largura de banda, sejam eles oscilógrafos de raios catódicos (3) ou até registadores potenciométricos, [3].

Na referência [3], descreve-se um método de identificação de sistemas baseado precisamente na amostragem, cujo desenvolvimento motivou o presente estudo.

A finalizar, cite-se ainda o emprego do retentor na obtenção de valores instantâneos de grandezas variáveis sob forma digital para transmissão directa a um computador, em sistemas de medida com aquisição e processamento automático de dados [4].

Nas aplicações referidas acima em que o retentor é utilizado para a reprodução de formas de curva com forte redução de largura de banda, surge como propriedade de grande interesse a possibilidade de imunidade em face de ruído. Com efeito, neste género de aplicações, o retentor comporta-se em relação à grandeza periódica a reproduzir, praticamente como um detector síncrono. Filtrando a saída, e sem afectar a reprodução da forma de curva que exige apenas uma pequena largura de banda, é possível rejeitar os efeitos de flutuações não correlacionadas sobrepostas na entrada, permitindo a reprodução fiel, mes-

(1) Publicação do Laboratório de Medidas Eléctricas do I. S. T. integrada no Projecto de Investigação TLE-5 subsidiado pelo Instituto de Alta Cultura.

(1) Sample-and-hold device.

(2) Sampled data control systems.

(3) Sampling oscilloscopes. [2].

mo no caso de grandezas completamente submersas em ruído.

O grau de rejeição possível, como é natural, varia inversamente com a largura de banda do filtro empregado e é portanto proporcional ao tempo disponível para efectuar a reprodução.

Sendo o retentor fundamentalmente um interruptor comandado, é um dispositivo linear. As respostas à grandeza a reproduzir e ao ruído adicionam-se simplesmente. Nestas condições, o estudo da transmissão unicamente de ruído através do retentor é suficiente para caracterizar este aspecto do seu funcionamento.

O objectivo central do presente estudo consiste assim em partir dum modelo realista do retentor com consideração dos valores finitos da sua constante de tempo e tempo de captação, e com base nele prever por via teórica a densidade espectral das flutuações à saída quando excitado à entrada por flutuações estocásticas com função de auto-correlação bem definida, submetendo os resultados à confirmação experimental. Ilustra-se ainda uma possível aplicação prática deste estudo com os resultados obtidos na recuperação e reprodução de formas de curva de grandezas imersas em ruído usando um retentor.

2. DESCRIÇÃO DO MODELO DO RETENTOR

O modelo adoptado está esquematizado na Fig. 1, e consiste essencialmente num interruptor comandado S seguido dum circuito integrador RC. A entrada é representada pela tensão y(t) e a saída pela tensão x(t) aos terminais do condensador, supostos em vazio. Com o interruptor S aberto a tensão de saída x(t) permanece constante com o valor que tinha no instante de abertura.

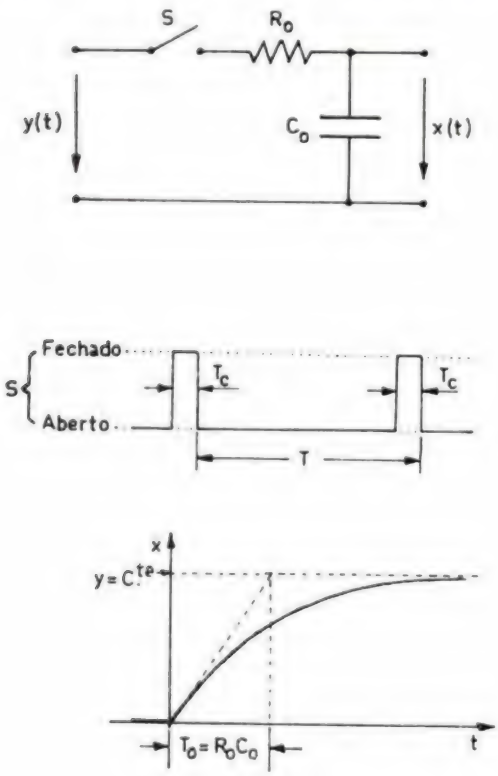


Fig. 1
Modelo do retentor

O interruptor S é fechado a intervalos regulares T (período de amostragem) e permanece fechado durante um breve intervalo de duração T_c (tempo de captação). Durante este intervalo o circuito RC «adapta-se» ao valor da tensão de entrada y(t) imposta, em maior ou menor grau consoante a sua constante de tempo $T_0 = R_0 C_0$ permitir.

Idealmente deve ser $T_c \ll T$ e $T_0 \ll T_c$ a fim da tensão x(t) retida no condensador representar praticamente um valor instantâneo de y(t). Na teoria que se expõe no seguimento, admite-se ser verdadeira a primeira condição, mas não necessariamente a segunda, sendo os valores finitos de T_0 e T_c levados em consideração.

3. ANÁLISE DO PROCESSO DE CAPTAÇÃO DUMA AMOSTRA

Com o interruptor S da Fig. 1 fechado, tem-se em valores instantâneos,

$$T_0 \frac{dx}{dt} + x = y \qquad (3.1)$$

onde $T_0 = R_0 C_0$ representa a constante de tempo do retentor.

Seja f(t) um integral particular de (3.1) correspondente à tensão y(t) imposta e h(t) o integral geral de (3.1) com o segundo membro nulo. Nestes termos a solução de (3.1) é da forma,

$$x(t) = f(t) + h(t) = f(t) + h_n \exp\left[-\frac{t - t_n}{T_0}\right]$$

Tomando para t_n o instante em que se inicia a captação da amostra n e designando por x_{n-1} o valor retido no final da amostragem anterior, Fig. 2, tem-se, calculando o valor da constante h_n que assegura a continuidade de x(t) em $t = t_n$ e para $t \geqslant t_n$,

$$x(t) = f(t) - \left[f(t_n) - x_{n-1}\right] \exp\left[-\frac{t - t_n}{T_0}\right]$$

Designando por x_n o valor de x(t) retido no final da amostragem n, tem-se, fazendo $t = t_n + T_c$ na expressão anterior,

$$x_n = f(t_n + T_c) - \left[f(t_n) \quad x_{n-1}\right] \phi_0 \qquad (3.2)$$

onde,

$$\phi_0 = \exp\left[-\frac{T_c}{T_0}\right] \qquad (3.3)$$

A expressão (3.2) permite calcular a sucessão de valores x_n das amostras retidas a partir de su-

cessivos valores de f(t). Note-se que esta função não é mais que a resposta do circuito $R_0 C_0$ da Fig. 1 à tensão y(t) imposta, com o interruptor S permanentemente fechado.

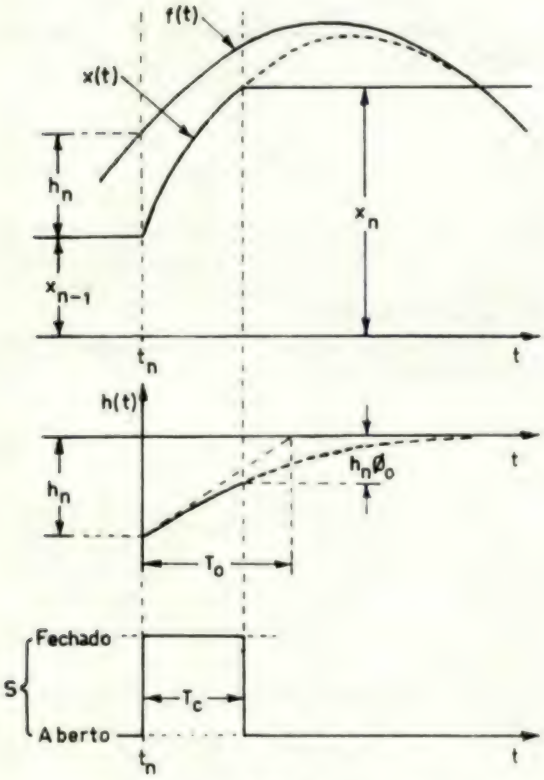


Fig. 2
Pormenor da captação duma amostra

4. DENSIDADE ESPECTRAL RESULTANTE DA AMOSTRAGEM DE FLUTUAÇÕES ESTOCÁSTICAS

Admitir-se-á que o intervalo de captação T_c é sempre muito pequeno comparado com o período de amostragem T, Fig. 1.

$$T_c \ll T \tag{4.1}$$

Nestas condições, a tensão x(t) na saída do retentor pode ser considerada como uma sucessão de impulsos rectangulares justapostos de duração T, Fig. 3, cujas amplitudes são dadas pelos valores da sucessão x_n. Em conformidade escreve-se,

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \, g(t - nT) \tag{4.2}$$

onde,

$$g(\tau) \begin{cases} = 1, \; 0 \leqslant \tau < T \\ = 0, \; 0 > \tau \geqslant T \end{cases} \tag{4.3}$$

representa um impulso de duração T, e amplitude unitária, cuja transformada de Fourier é dada por,

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{\tau=T} g(\tau) \exp(-j\omega\tau) \, d\tau =$$

$$= T \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \right] \exp(-j\omega T/2) \tag{4.4}$$

Para efeitos desta análise, a tensão y(t) imposta é encarada como uma variável estocástica, bem como a sucessão de valores x_n resultantes da amostragem e consequentemente também a tensão x(t) à saída definida por (4.2).

A análise, pormenorizada no Apêndice-1, conduz a uma expressão para o valor expectável da densidade espectral de x(t) (por Hz de largura de banda), da forma,

$$P(\omega) = \frac{2}{T} |\Gamma(\omega)|^2 \left[X_0 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} X_s \cos(s\omega T) \right] \tag{4.5}$$

onde

$$X_s = \langle x_n x_{n-s} \rangle \tag{4.6}$$

representa o valor expectável da auto-correlação da sucessão x_n para um atraso de s = 1, 2, 3,... amostras.

Numa vizinhança da frequência zero tal que,

$$\omega \ll (2\pi/T) \tag{4.7}$$

pode considerar-se a densidade espectral praticamente constante com o valor igual a P(0). Tomando o limite (1) → 0 em (4.4) obtém-se de (4.5),

$$P(0) = 2T \left[X_0 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} X_s \right] \tag{4.8}$$

resultado a aplicar no cálculo do valor quadrático expectável das flutuações à saída dum filtro de banda estreita colocado após o retentor. Designando essa saída por z(t) será,

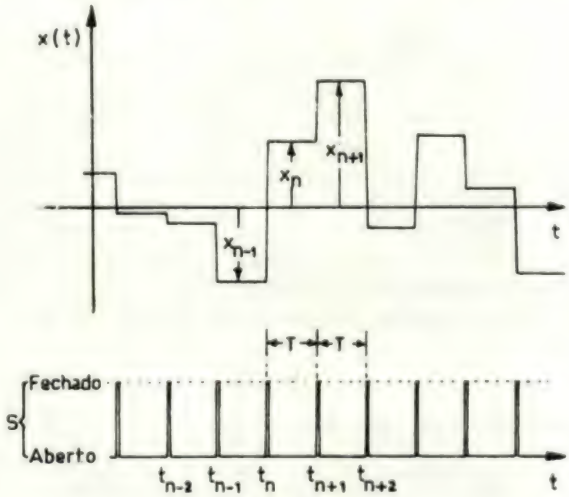


Fig. 3
Saída do retentor

$$Z^2_{ef} = \Omega_r P(0) \qquad (4.9)$$

onde Ω_r designa a largura de banda eficaz para ruído branco do filtro, expressa em Hz.

5. EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA DA SUCESSÃO X.

Tome-se a equação de recorrência da sucessão x_n (3.2) escrita na forma,

$$x_n - \phi_0 x_{n-1} = f(t_n + T_c) - \phi_0 f(t_n)$$

referida à amostra n cuja captação se inicia em $t = t_n$, e ainda a mesma equação referida à amostra n-s cuja captação se inicia em $t = t_n - sT$,

$$x_{n-s} - \phi_0 x_{n-s-1} = f(t_n - sT + T_c) - \phi_0 f(t_n - sT)$$

Multiplicando membro a membro estas equações e extraindo o valor médio, obtém-se em termos de valores expectáveis a equação,

$$X_{s-1} - (\phi_0 + \phi_0^{-1}) X_s + X_{s+1} = F(sT - T_c) -$$

$$- (\phi_0 + \phi_0^{-1}) F(sT) + F(sT + T_c) \qquad (5.1)$$

onde a função $F(\tau)$ designa o valor expectável da auto-correlação de f(t), isto é,

$$F(\tau) = \langle f(t)\ f(t-\tau) \rangle$$

A equação (5.1) é uma equação de recorrência de segunda ordem em X_s, linear de coeficientes constantes que permitirá obter a sucessão de valores X_s pretendidos, dada a função $F(\tau)$ de auto-correlação de f(t). Esta função, como se salientou no final de 3., não é mais do que y(t) filtrada por acção da constante de tempo $T_0 = R_0 C_0$ do retentor.

6. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Para exemplificar o método de cálculo, considera-se o caso elementar de y(t) ser ruído branco filtrado por acção dum simples filtro RC passa-baixo de constante de tempo T_1.

O caso mais geral dum filtro com função de transferência racional pode ser tratado por simples extensão deste mesmo método.

Nas condições enunciadas, e desde que seja,

$$T_0 \neq T_1 \qquad (6.1)$$

obtém-se. (Veja-se Apêndice-2),

$$F(\tau) = \alpha_0 \exp(-|\tau|/T_0) + \alpha_1 \exp(-|\tau|/T_1) \qquad (6.2)$$

onde,

$$\alpha_0 = Y^2_{ef} \frac{T_1}{T_0} \frac{T_0^2}{T_0^2 - T_1^2} \qquad \alpha_1 = Y^2_{ef} \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_0^2} \qquad (6.3)$$

Na escrita da equação de recorrência (5.1) para este caso particular introduza-se ainda, além de ϕ_0 já definido em (3.3),

$$\phi_1 = \exp(-T_c/T_1)$$
$$\lambda_1 = \exp(-T/T_1) \qquad (6.4)$$

considerando-se em primeiro lugar as equações relativas a $|s| \geqslant 1$, em que os elementos da sucessão X_s intervenientes, ou são todos de índice positivo, ou todos de índice negativo.

A substituição de (6.2) na equação de recorrência (5.1) conduz neste caso a,

$$s \geqslant 1 \qquad X_{s-1} - (\phi_0 + \phi_0^{-1}) X_s + X_{s+1} = \beta_1 \lambda_1^{|s|} \qquad (6.5)$$

onde,

$$\beta_1 = \left[(\phi_1 + \phi_1^{-1}) - (\phi_0 + \phi_0^{-1}) \right] \alpha_1 \qquad (6.6)$$

Admitindo que,

$$\phi_0 \neq \lambda_1$$

ou seja, atendendo às definições (3.3) e (6.4),

$$T_c/T_0 \neq T/T_1 \qquad (6.7)$$

a equação (6.5) admite a solução particular da forma,

$$A_1 \lambda_1^{|s|}$$

onde a constante A_1 se pode obter por substituição em (6.5), e indiferentemente para $s \geqslant 1$ ou para $s \leqslant -1$, com o resultado,

$$A_1 = \frac{(\phi_1 + \phi_1^{-1}) - (\phi_0 + \phi_0^{-1})}{(\lambda_1 + \lambda_1^{-1}) - (\phi_0 + \phi_0^{-1})} \alpha_1 \qquad (6.9)$$

A esta solução particular pode sempre sobrepor-se uma solução da equação homogénea correspondente a (6.5) com o segundo membro nulo. São possíveis dois tipos de solução independentes da forma,

$$\phi_0^s \text{ e } \phi_0^{-s}$$

Atendendo a que a sucessão X_s representa uma auto-correlação, conclui-se que deve ser função par do índice s e tender para zero com $|s| \to \infty$. Como $\phi_0 < 1$, a solução ϕ_0^s aplicar-se-á no domínio $s \leqslant 1$ e a solução ϕ_0^{-s} no domínio $s \leqslant -1$, pelo que a solução geral de (6.5) deve ser tomada na forma.

$$X_s = B\ \phi_0^{|s|} + A_1 \lambda_1^{|s|} \qquad (6.10)$$

onde B é uma constante arbitrária. O valor desta constante deverá ser fixado de modo a que esta solução satisfaça ainda a equação de recorrência (5.1) para s = 0. Nesta equação surgem simultaneamente X_{-1} e X_1 cujos valores devem ser iguais, pelo que a equação toma a forma,

$$2X_1 - (\phi_0 + \phi_0^{-1})X_0 = 2F(T_c) - (\phi_0 + \phi_0^{-1})F(0)$$

onde, por substituição de (6.10), se obtém o valor da constante,

$$B = \alpha_0 + \frac{1}{\phi_0^{-1} - \phi_0}\left[(\phi_0 + \phi_0^{-1} - 2\phi_1)\alpha_1 - (\phi_0 + \phi_0^{-1} - 2\lambda_1)A_1\right] \quad (6.11)$$

O resultado expresso por (6.10) mostra que a correlação dos valores das sucessivas amostras tem duas origens distintas. Por um lado, como era fácil de prever, resulta dessa correlação existir já nas flutuações impostas na entrada do retentor. Este efeito corresponde à parcela em $\lambda_1^{|s|}$ de (6.10), que será apreciável desde que a constante T_1 que caracteriza o filtro de entrada seja comparável ao período de amostragem T, veja-se (6.4). Por outro lado, a constante de tempo T_0 do retentor, se for comparável ao tempo de captação T_c, determina igualmente a existência de correlação das sucessivas amostras através da parcela em $\phi_0^{|s|}$ de (6.10), veja-se (3.3). O facto do regime livre associado à constante de tempo $T_0 = R_0 C_0$ do retentor não ter tempo de se extinguir totalmente durante o intervalo de captação, faz com que, independentemente doutras circunstâncias, o valor de x_n da amostra n dependa do valor x_{n-1} da amostra anterior (3.2), contribuindo para a correlação das sucessivas amostras.

7. CÁLCULO DA DENSIDADE ESPECTRAL À SAÍDA

O facto de X_s ser dado por uma soma de progressões geométricas de razões ϕ_0 e λ_1 (6.10) permite somar a série (4.5). Representando a função $\cos(s\omega T)$ na forma exponencial,

$$\cos(s\omega T) = \frac{1}{2}\left[\exp(js\omega T) + \exp(-js\omega T)\right]$$

obtém-se (4.5) como uma soma de progressões geométricas de razões complexas dadas pelas exponenciais de expoentes,

$$\gamma_0 = -(T_c/T_0) + j\omega T \qquad \gamma_1 = -(T/T_1) + j\omega T \quad (7.1)$$

e os seus conjugados.

Fazendo uso da expressão (4.4) para $\Gamma(\omega)$ o resultado da soma exprime-se por,

$$P(\omega) = 2T\frac{\text{sen}^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}\,\text{Re}\left\{B\coth(-\gamma_0/2) + A_1\coth(-\gamma_1/2)\right\} \quad (7.2)$$

Em particular, para $\omega \to 0$,

$$P(0) = 2T\left[B\coth(T_c/2T_0) + A_1\coth(T/2T_1)\right] \quad (7.3)$$

onde as constantes A_1 e B são calculadas segundo (6.9) e (6.11) em função das razões de tempos T_c/T_0, T_c/T_1 e T/T_1.

8. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para obter uma ideia do andamento da função descrita por (7.2), considere-se o caso particular dum retentor ideal em que $T_0 \to 0$. Nestas circunstâncias desaparece a parcela de coeficiente B e $A_1 \to Y^2_{ef}$ obtendo-se,

$$P(\omega) = 2T\frac{\text{sen}^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}\,\text{Re}\left\{\coth(-\gamma_1/2)\right\} Y^2_{ef} \quad (8.1)$$

Se além disso admitirmos que $T_1 \ll T$, ou seja, que o tempo característico da correlação à entrada é desprezável face ao período de amostragem, o factor em $\coth(-\gamma_1/2)$ fica praticamente constante e igual à unidade. Nesta situação limite o andamento da função $P(\omega)$ é traduzido pela função $(\text{sen}x/x)^2$ que é assim característico das situações em que as amplitudes das sucessivas amostras não apresentam correlação apreciável. Podem então encarar-se os efeitos da correlação como uma modulação deste espectro básico por efeito dos termos da expressão (7.2) dependentes de γ_0 e γ_1.

Para ilustrar o seu efeito considere-se o termo dependente de γ_1,

$$\text{Re}\left\{\coth(-\gamma_1/2)\right\} = \frac{1 - \lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1\cos\omega T}$$

Quando multiplicado por um factor positivo como em (8.1), os máximos ocorrem nos zeros do primeiro factor e os mínimos a meia distância entre os máximos, provocando um achatamento das arcadas laterais da função $|\text{sen}x/x|$ e reforçando a arcada central, Fig. 4.

Os resultados que se obtém para várias combinações dos tempos característicos encontram-se reproduzidos nas Figs. 5 e 6.

Nestes gráficos normalizou-se a escala das frequências tomando a frequência de amostragem $f_a = 1/T$ para referência, fazendo

$$\omega T = 2\pi(f/f_a)$$

e usando o cociente adimencional f/f_a em abcissas.

Quanto às ordenadas usou-se a quantidade adimensional definida por,

$$p = (P/Y_{ef}^2 T)^{\frac{1}{2}} = (Pf_a)^{\frac{1}{2}}/Y_{ef}$$

Esta quantidade é proporcional ao valor eficaz das flutuações à saída e não ao valor quadrático das mesmas, sendo o valor eficaz das flutuações à entrada tomado como referência. Corresponde assim mais directamente aos valores que efectivamente são medidos nos ensaios experimentais. A introdução do factor $1/T = f_a$ refere o resultado à largura de banda de f_a Hz em vez de 1 Hz com o que se obtém um resultado independente do valor absoluto do período de amostragem T, que somente intervem através da razão T/T_1.

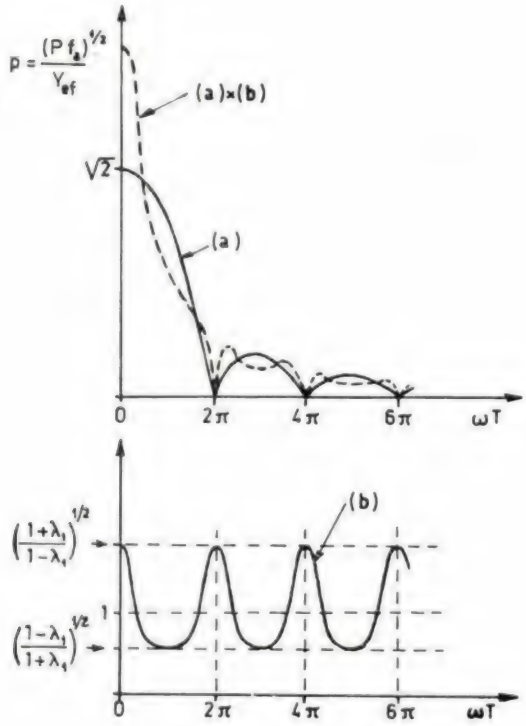


Fig. 4

Deformação do espectro básico. (a) $\sqrt{2}\,|\,\text{sen}\ x/x\,|$, $x = \omega T/2$. (b) $[\text{Re}\,\{\coth(-\gamma_1/2)\}]^{\frac{1}{2}}$.

No primeiro grupo de resultados, Fig. 5, é $T_0 = 0{,}1\,T_c$. A constante de tempo do retentor pode considerar-se curta, a correlação das amostras é devida praticamente apenas à coerência da tensão de entrada expressa pelo tempo T_1 e é importante na medida em que este tempo for comparável ao período de amostragem T. A curva relativa a $T_1 = 0{,}02T$ traduz praticamente a situação limite de ausência de correlação, apresentando a forma característica da função $|\,\text{sen}x/x\,|$. O progressivo achatamento das arcadas com o aumento de T_1 é evidente.

No segundo grupo de resultados, Fig. 6, fez-se $T_0 = T_c$, de modo a por em evidência os efeitos da constante de tempo do retentor. A deformação das arcadas é em geral mais acentuada e subsiste mesmo para pequenos valores de T_1, isto é, mesmo quando a coerência da tensão à entrada deixa de ser importante.

9. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

9.1 — Densidade espectral das flutuações à saída do retentor.

Para verificação dos resultados da teoria exposta, realizou-se a montagem cujo esquema se indica na Fig. 7, em que:

Filtro 1 — Filtro RC passa baixo de constante de tempo T_1 (regulável de 50 a 200 μs).

Filtro 2 — Variante a): Analisador de espectro com largura de banda fixa (100 Hz) e frequência central variável comandada por tensão (50 Hz a 1 MHz). Saída proporcional ao valor eficaz.

Variante b): Filtro RC activo passa-baixo com característica do tipo Bessel de 2.ª ordem e frequências de corte de 50, 100 e 200 Hz. Permite obter a densidade espectral na vizinhança da frequência zero.

A1,A2,A3 — Amplificadores lineares (0 a 1 MHz).

V1,V2,V3 — Voltímetros quadráticos empregando conversores termo-eléctricos (5 Hz a 2 MHz). Indicação proporcional ao valor eficaz.

GR — Gerador de ruído com densidade espectral constante até 500 kHz.

Retentor — Dispositivo construído para a amostragem na identificação de sistemas pelo método da referência [3]. Constante de tempo $T_0 = 1{,}6$ μs (fixa). Tempo de captação regulável $T_c = 0{,}8$ a $3{,}2$ μs. Período de amostragem T definido externamente.

O traçado da função densidade espectral é obtido directamente no registador, aplicando a saída do analisador em ordenadas e a tensão de comando da frequência central em abcissas. Variante a).

Não obstante a pequena largura de banda do registador, verificou-se ainda a necessidade de filtragem passa-baixo da saída do analisador a fim de reduzir as flutuações a um nível razoável. Utilizou-se um filtro RC de constante 3 s, e realizou-se o varrimento da frequência lentamente com durações de cerca de 30 minutos.

A calibração absoluta das ordenadas fez-se aplicando ao sistema de medida ruído de características conhecidas.

Os resultados, tal qual foram obtidos no registador, encontram-se reproduzidos nas figuras 8, 9, 10 e 11, tendo-se sobreposto nestes gráficos pontos calculados para cada caso com o auxílio da expressão teórica (7.2). Estes exemplos correspondem a quatro

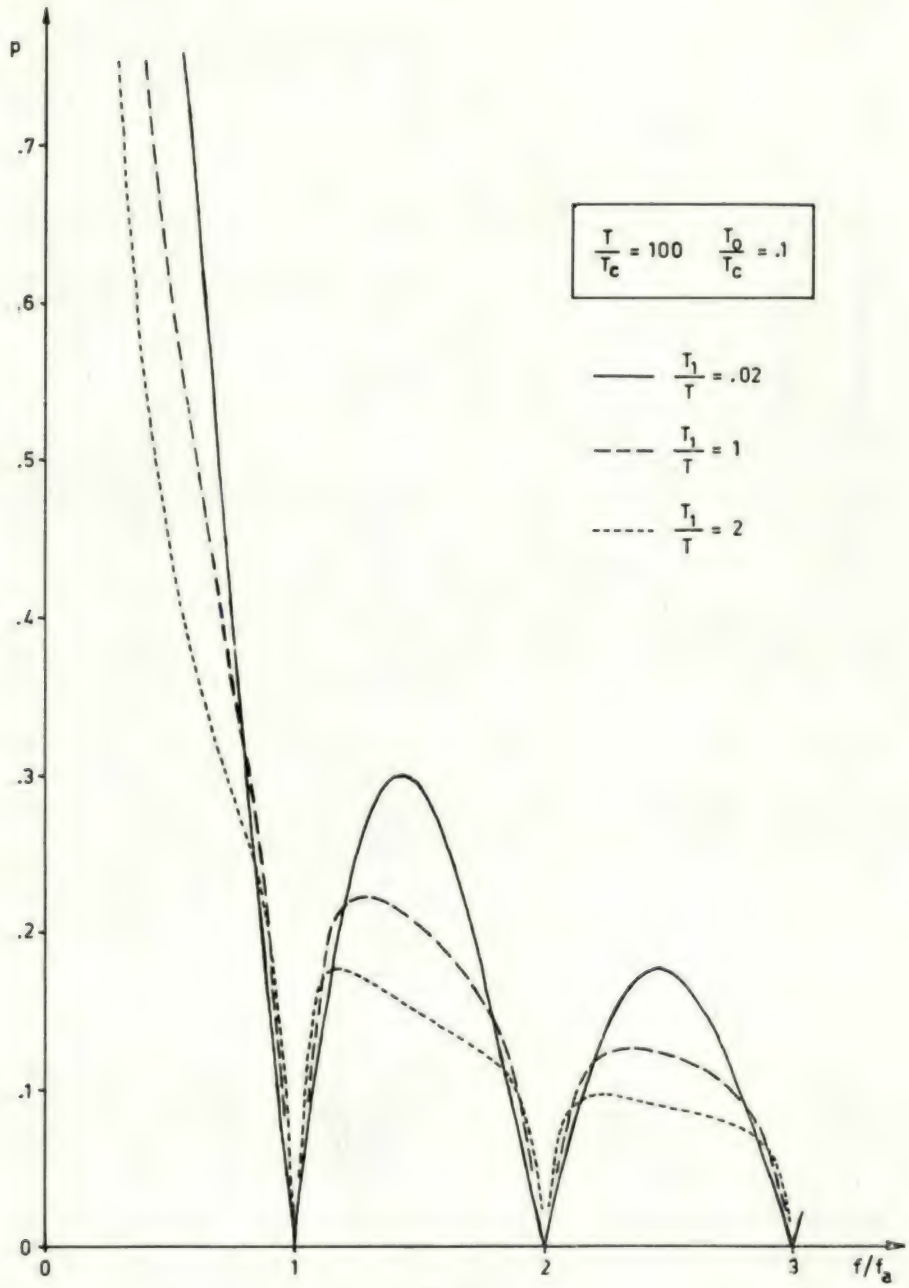


Fig. 5

Funções densidade espectral com constante de tempo do retentor curta

combinações distintas dos valores das razões características T_c/T_0 e T_1/T, com valores fixos de T_0 e T, conforme se indica nas legendas.

O acordo dos resultados experimentais é, duma forma geral, muito bom excepto na vizinhança dos zeros que não se observam nos resultados experimentais. Tal facto deve-se, por um lado à largura de banda finita do analisador, por outro lado a imperfeições da comutação no retentor. As transições de nível entre as sucessivas amostras não são perfeitamente abruptas como se supõe na teoria surgindo além disso pequenas perturbações transitórias nos extremos do intervalo de captação, Fig. 17. Estes factos determinam a presença à saída dum espectro de riscas espúrio com a frequência de amostragem e suas harmónicas que vão precisamente incidir nos zeros da função densidade espectral prevista.

A determinação da densidade espectral na vizinhança da frequência zero fez-se com a variante b) da montagem da Fig. 7, estando os resultados marcados sobre o gráfico teórico da fig. 12, obtido com o auxílio da expressão (7.3).

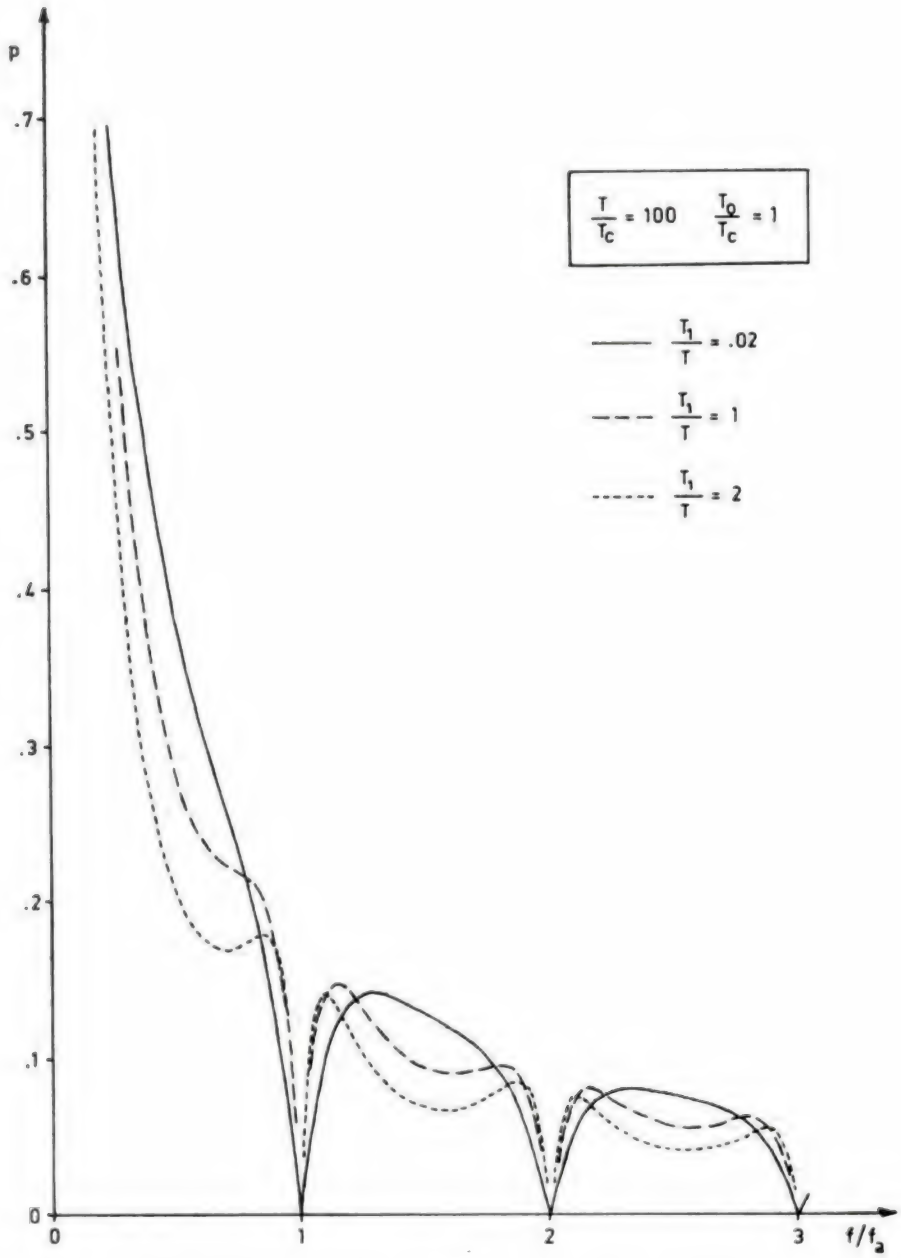


Fig. 6

Funções densidade espectral com constante de tempo do retentor longa

9.2 — Aplicação do retentor na recuperação de formas de curva submersas em ruído.

Como exemplo de aplicação, considerou-se o problema da recuperação da resposta impulsiva dum circuito RLC em presença de ruído de amplitude bastante superior. Para o efeito foi utilizada a montagem representada na Fig. 13, onde além do material já referenciado a propósito da montagem da Fig. 7 se tem ainda:

GI — Gerador de impulsos para a excitação periódica do circuito RLC.

RLC — Circuito a ensaiar, cujo esquema está indicado na Fig. 14.

Unidade de atraso — Permite fixar o instante de amostragem em cada período da tensão a observar com um atraso τ em relação a um instante de referência, Fig. 15. Esta unidade possui uma saída analógica proporcional a τ, permitindo a reprodução da amplitude das sucessivas amostras em função de τ, (reprodução da forma de curva em tempo expandido). É possível expandir 0,5 μs de tempo real até 1 s de tempo expandido.

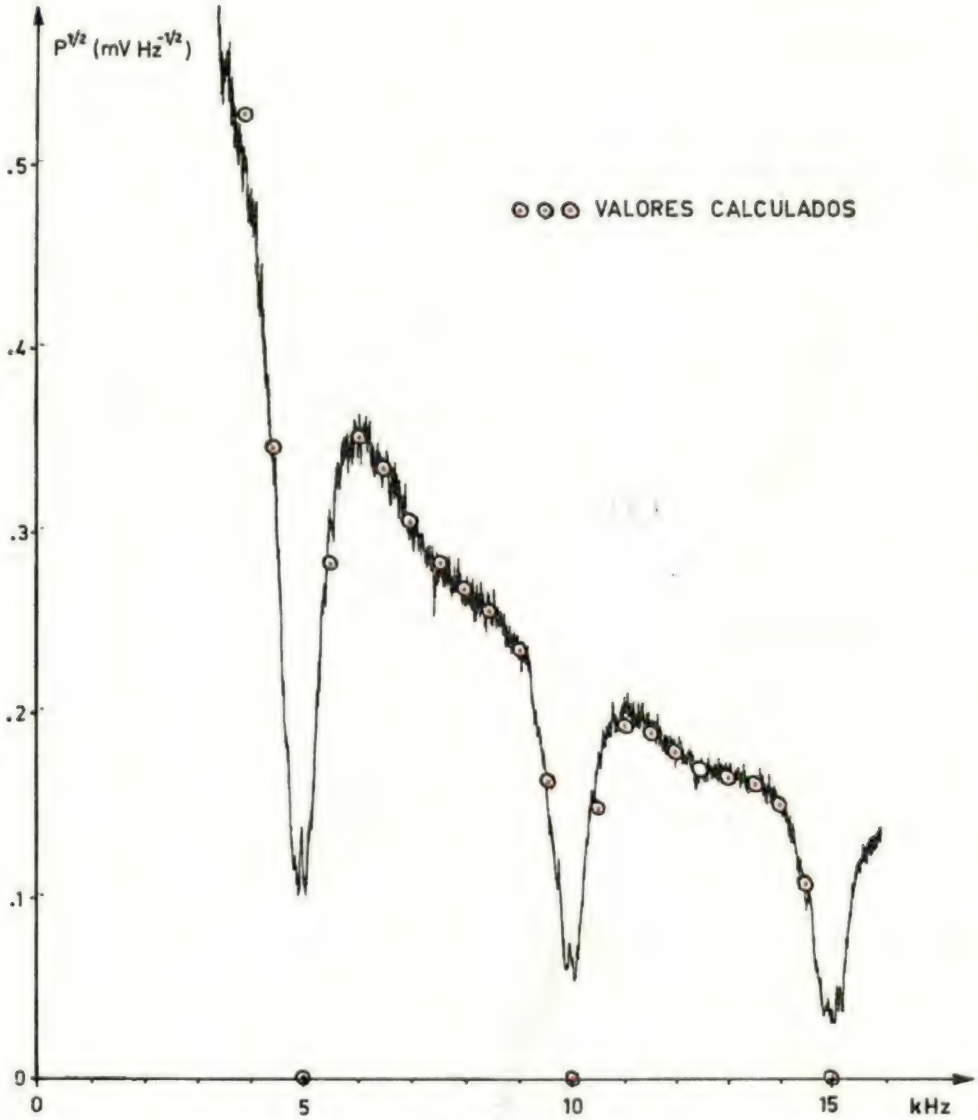


Fig. 9

Função densidade espectral. Resultado experimental obtido para $(T_0/T_c)=0,5$ e $(T_1/T)=1,0$

Y1 — Registo oscilográfico em tempo real da tensão amostrada.

Y2 — Registo oscilográfico em tempo expandido do resultado da amostragem, (base de tempo u_τ).

A frequência de repetição do fenómeno a observar foi fixada em 2 kHz, correspondendo-lhe portanto um período de amostragem $T=500$ μs (2000 amostras por segundo). No oscilograma (A) da Fig. 16 mostra-se o sinal periódico sem ruído cujo valor eficaz era de 30 mV, representando o oscilograma (C) da mesma figura a forma de um período em pormenor (tempo real).

O ruído adicionado consistiu na saída de banda larga do gerador de ruído filtrada pelo filtro-1, Fig. 13, de constante de tempo $T_1=100$ μs, resultando em flutuações à saída do filtro com o valor eficaz $Y_{ef}=200$ mV. A relação sinal/ruído à entrada do retentor era assim de -16 db.

O oscilograma (B) da Fig. 16 mostra o aspecto, obtido com um único varrimento, da sobreposição do sinal do oscilograma (A) com o ruído, tal como se apresentam à entrada do retentor. O oscilograma (D) da Fig. 16 mostra a forma da curva recuperada obtida por filtragem da saída do retentor pelo filtro-2 de largura de banda eficaz $\Omega_r=0,4$ Hz e em função da base de tempo expandida u_τ. O oscilograma da Fig. 17 representa um segmento, obtido com um único varrimento, da tensão à saída do retentor antes da filtragem, (comparar com a Fig. 3).

Utilizando os resultados do gráfico da Fig. 12, obtido a partir da expressão (4.8) e normalizado

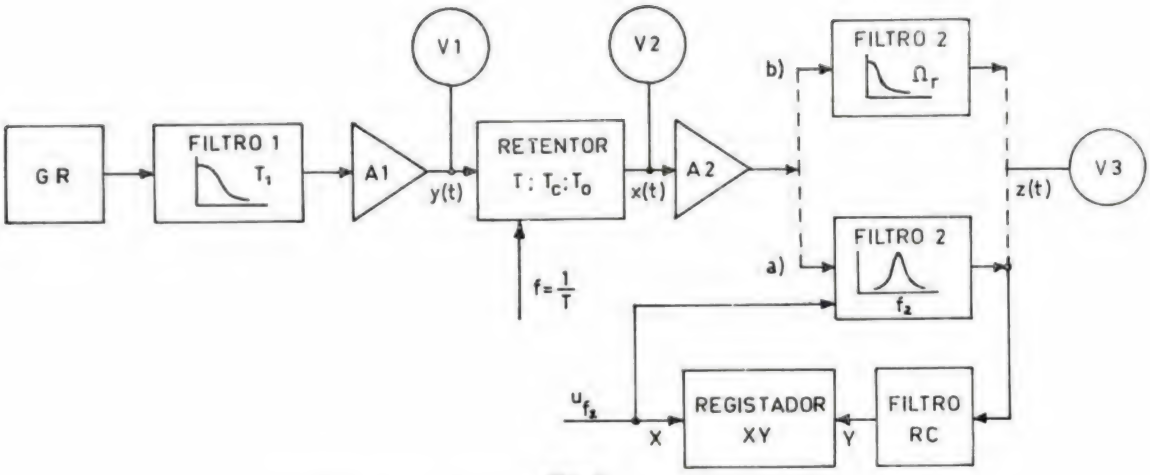


Fig. 7
Montagem para o traçado experimental da densidade espectral

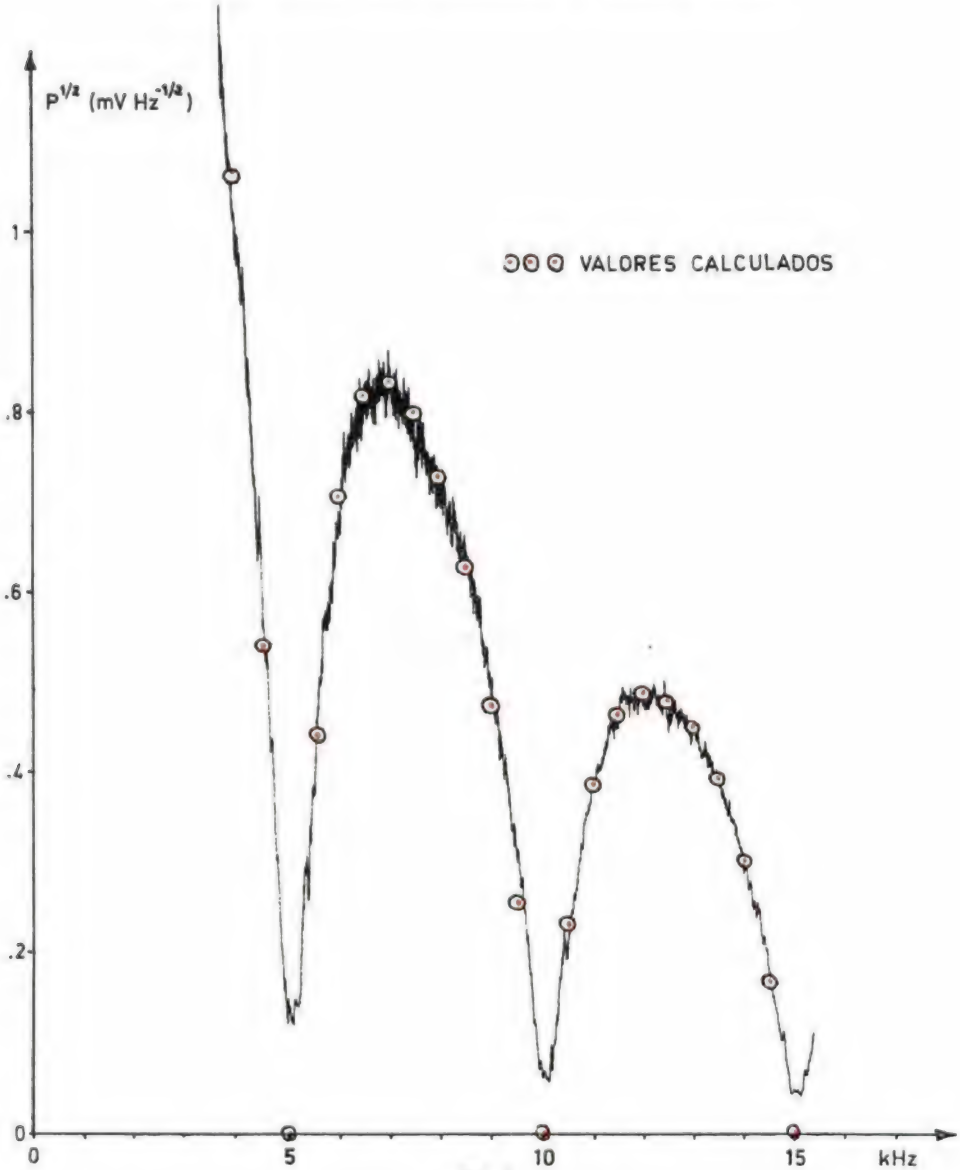


Fig. 8
Função densidade espectral. Resultado experimental obtido para $(T_0/T_c)=0,5$ e $(T_1/T)=0,25$

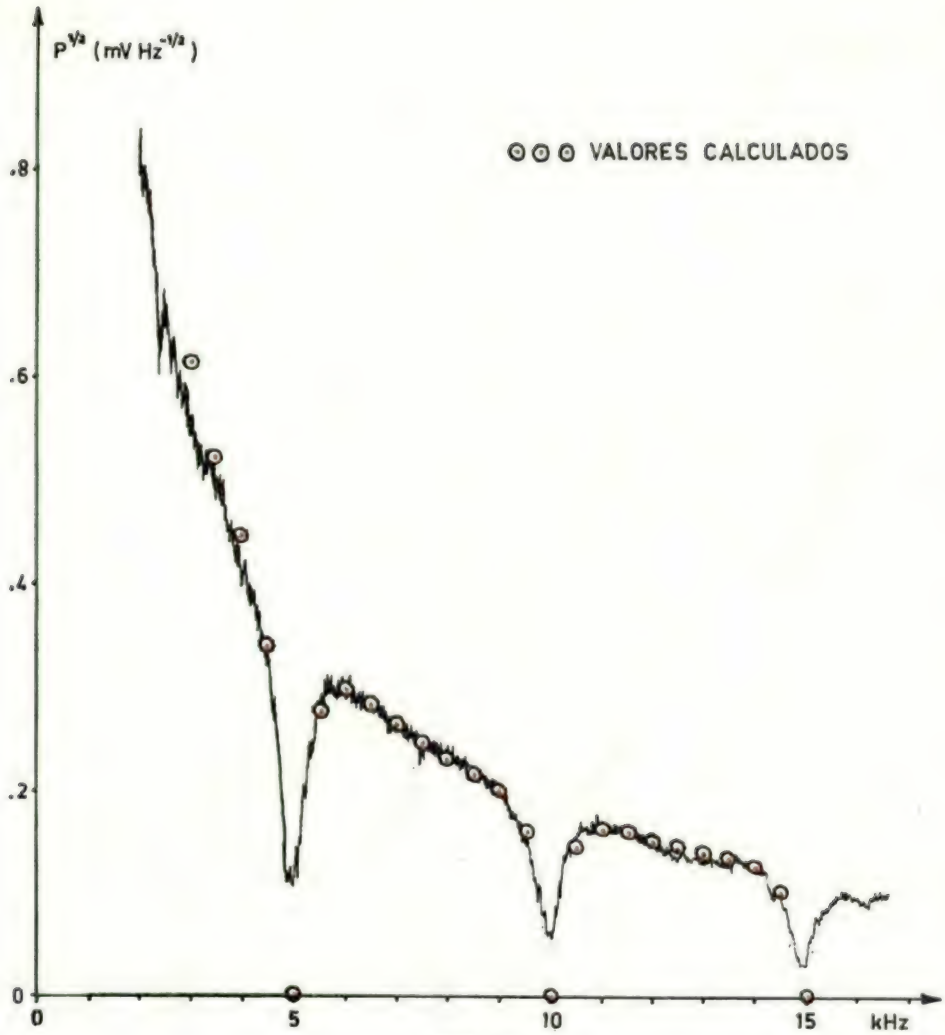


Fig. 10

Função densidade espectral. Resultado experimental obtido para $(T_0/T_c)=2,0$ e $(T_1/T)=0,25$

como se explicou em 8., obtém-se para relação entre os quadrados dos valores eficazes do ruído à entrada Y_{ef} e à saída filtrada do retentor Z_{ef},

$$Z^2_{ef}/Y^2_{ef} = \Omega_r T \; p^2(0)$$

Atendendo às condições da experiência obtém-se uma relação de 4×10^{-4} ou seja de —34 db, o que significa uma relação sinal/ruído de +18 db no oscilograma (D) da Fig. 16.

Note-se que os 250 μs de tempo real representados levaram cerca de 50 s tempo expandido a obter, pelo que a recuperação da forma de curva correspondeu ao processamento de cerca de 100 000 amostras.

10. CONCLUSÕES

Estabeleceu-se um método de cálculo da densidade espectral das flutuações à saída dum dispositivo retentor de amostras, partindo da especificação da função de auto-correlação das flutuações à entrada e com base num modelo do dispositivo consistindo num interruptor seguido dum circuito integrador RC.

Revelaram-se como parâmetros relevantes do dispositivo o período de amostragem, o tempo de captação e a constante de tempo do circuito integrador, quanto às flutuações à entrada o seu tempo de coerência tal como é condicionado pela respectiva função de auto-correlação.

A correlação dos valores das sucessivas amostras à saída é condicionada imediatamente pela correlação dos sucessivos valores das flutuações à entrada na medida em que o período de amostragem for comparável ao tempo de coerência dessas flutuações, e ainda na medida em que o tempo de captação for comparável à constante de tempo do retentor.

No caso limite de flutuações à entrada de banda muito larga, (tempo de coerência desprezável face ao período de amostragem), com um retentor ideal em que a constante de tempo seja desprezável face ao

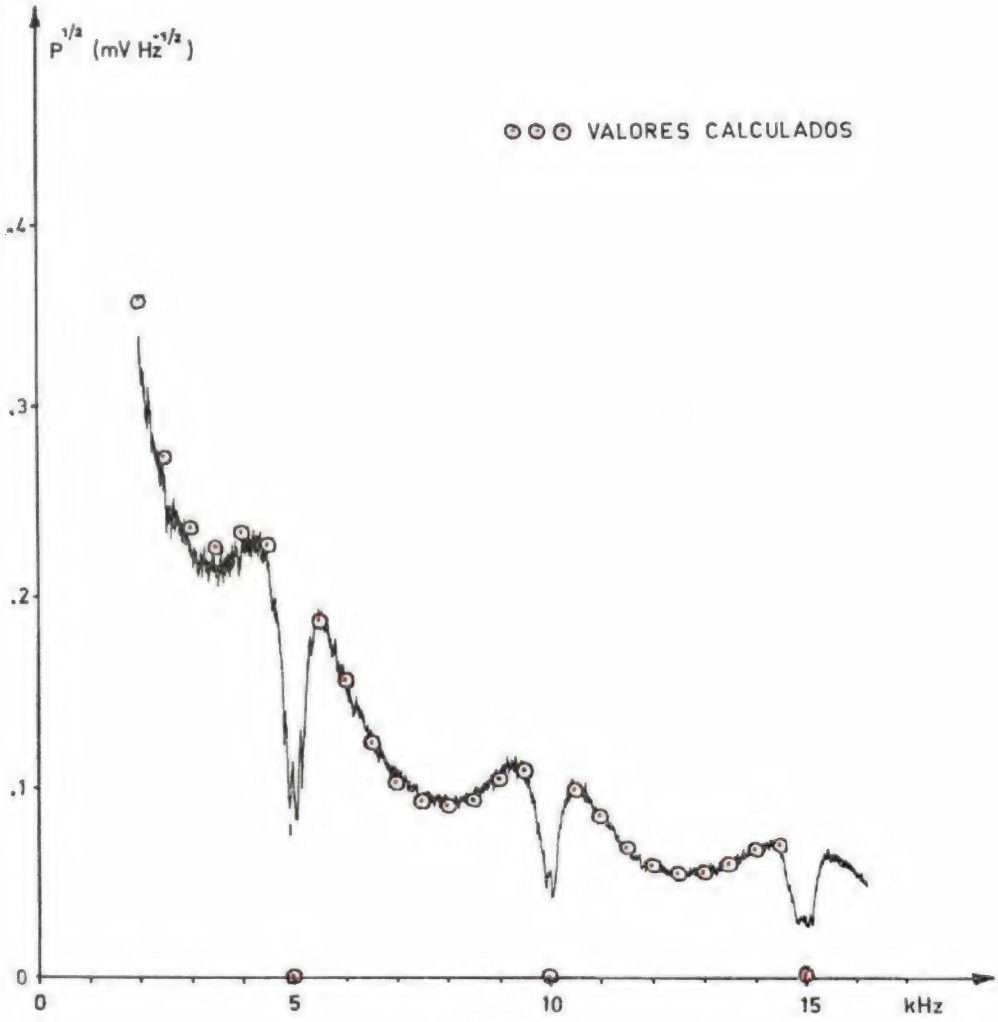


Fig. 11

Função densidade espectral. Resultado experimental obtido para $(T_0/T_c)=2{,}0$ e $(T_1/T)=1{,}0$

tempo de captação, não há correlação das sucessivas amostras e a função densidade espectral à saída é do tipo $(\text{sen}x/x)^2$. A introdução de correlação pelos efeitos descritos acima deforma este espectro.

Verificou-se que os resultados da teoria eram confirmados com bastante rigor por medidas feitas num dispositivo real.

Como exemplo duma aplicação do retentor em que é fundamental o conhecimento do seu comportamento em face de ruído, fizeram-se com sucesso experiências relativas à recuperação da forma de curva duma grandeza periódica submersa em ruído.

11. BIBLIOGRAFIA

[1] J. G. Truxal «Automatic Feedback Control System Synthesis», Capítulo 9, McGraw Hill, 1955.

[2] C. H. House em «Electronic Measurements and Instrumentation», Capítulo 11, McGraw Hill, 1971.

[3] J. M. Viegas Gonçalves «Identificação de Sistemas Lineares por Amostragem Finita no Domínio do Tempo». Técnica, vol. 36, pgs. 133 a 140, n.º 423 de Fevereiro de 1975.

[4] W. D. Cooper «Electronic Instrumentation and Measurement Techniques», Capítulo 15, Prentice-Hall 1970.

[5] F. Ollendorff «Schwankungserscheinungen in Elektronenröhren», Capítulo E. 14, Springer Verlag (Wien) 1961.

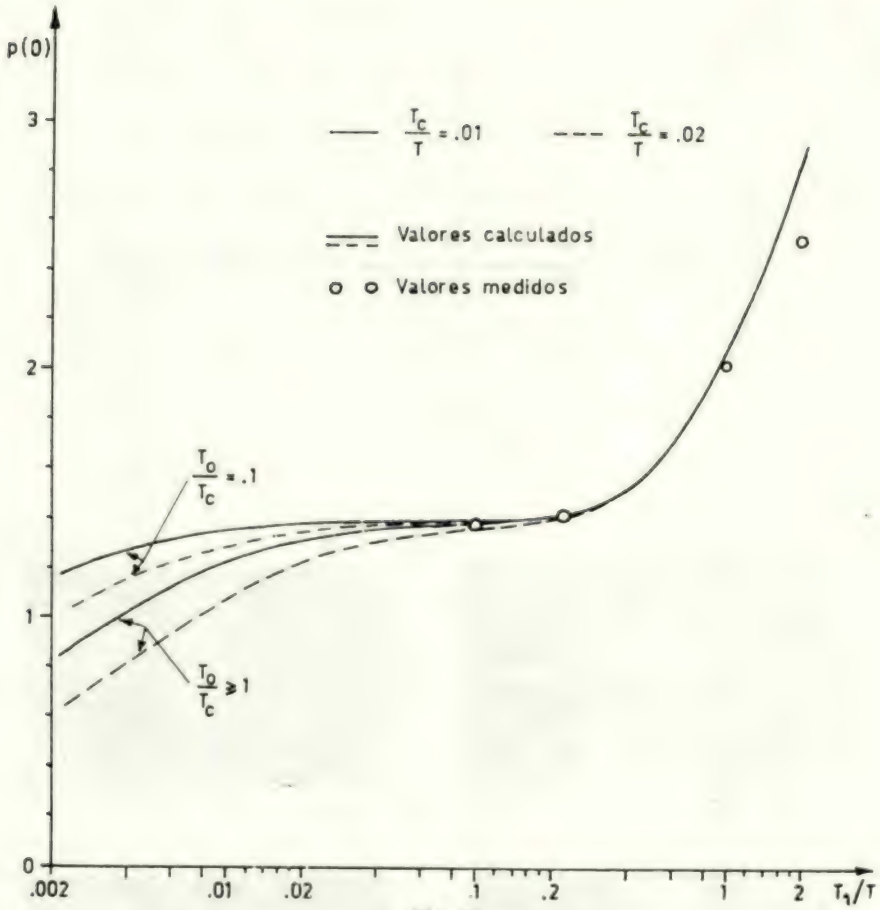


Fig. 12
Densidade espectral na vizinhança da frequência zero

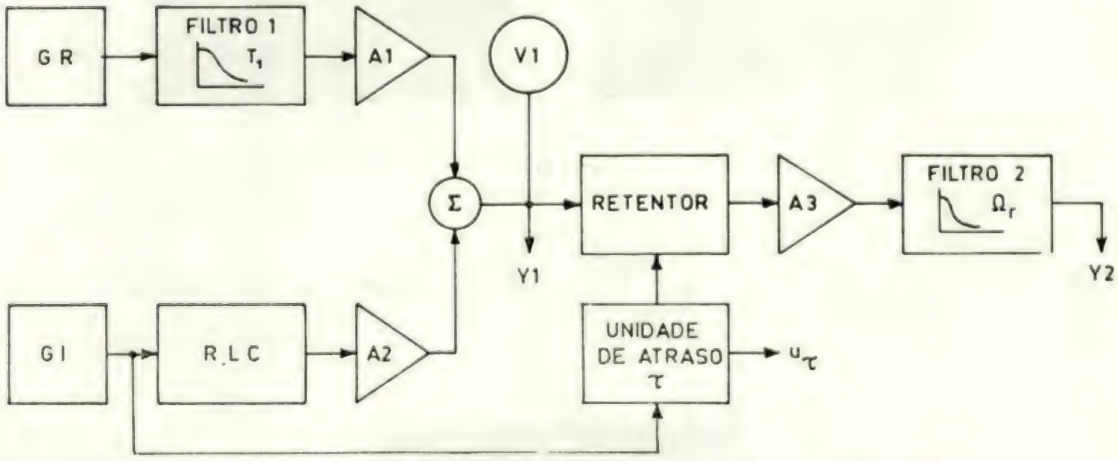


Fig. 13
Montagem para a recuperação da forma de uma curva imersa em ruído

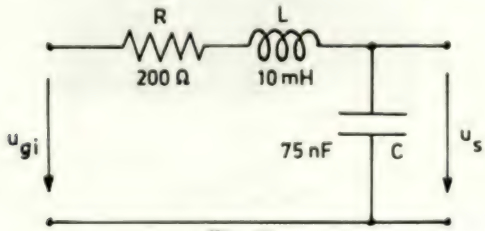


Fig. 14
Circuito RLC usado no ensaio

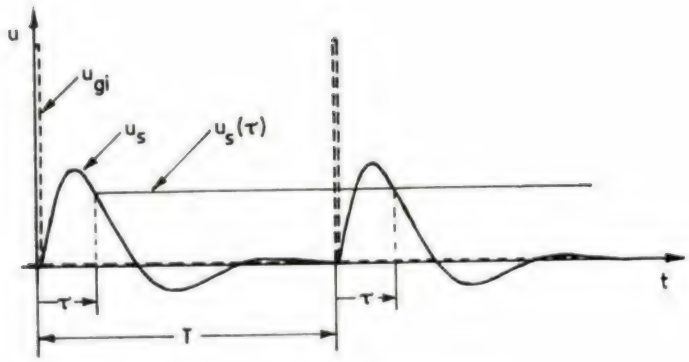


Fig. 15
Significado do tempo de atraso τ

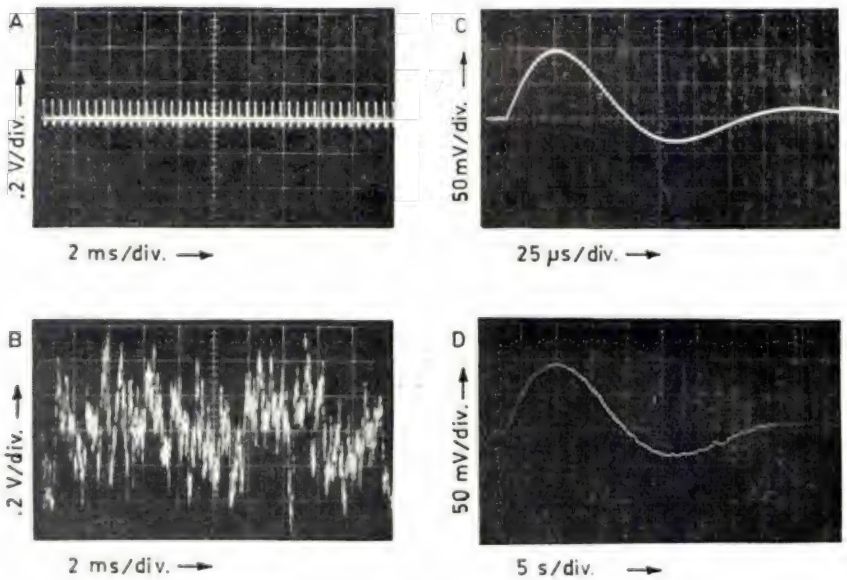


Fig. 16

Oscilogramas.
(A) Sinal sem ruído.
(B) Sinal com ruído.
(C) Pormenor dum período do sinal (tempo real).
(D) Forma de curva recuperada a partir do sinal do oscilograma (B), (tempo expandido). Comparar com (C)

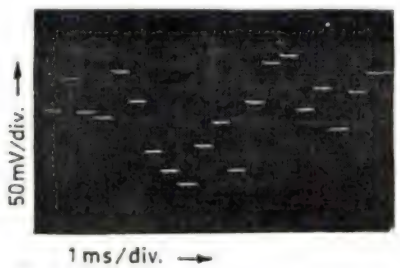


Fig. 17
Saída do retentor

12. APÊNDICES

Apêndice - 1.

Na dedução da expressão da densidade espectral duma sucessão de impulsos de amplitudes flutuando estocasticamente, seguir-se-á o método da referência [5], generalizando-o no que respeita à consideração da existência de correlação entre as sucessivas amplitudes.

Considere-se para o efeito uma população de sucessões finitas de impulsos de duração T, cuja forma é caracterizada pela função $g(\tau)$ $(0 \leqslant \tau < T)$ e a amplitude por x_k.

A descrição dum membro da população (m) como função do tempo será dada por,

$$x_N^{(m)}(t) = \sum_{k=-N}^{+N} x_k^{(m)} g(t - kT)$$

onde N mede a extensão da sucessão que cobrirá um intervalo de tempo de extensão $(2N+1)T$.

A função de auto-correlação finita deste membro da população será então,

$$A_N^{(m)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_N^{(m)}(t)\, x_N^{(m)}(t-\tau)dt =$$

$$= \sum_{p=-N}^{+N} \sum_{q=-N}^{+N} x_p^{(m)}\, x_q^{(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-pT)g(t-qT-\tau)dt$$

Representando por $G(\tau)$ a função de auto-correlação finita do impulso,

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g(t-\tau)\, dt$$

e fazendo,

$$s = p - q$$

tem-se,

$$A_N^{(m)}(\tau) = \sum_{p=-N}^{+N} \sum_{s=p-N}^{p+N} x_p^{(m)}\, x_{p-s}^{(m)}\, G(\tau - sT) \qquad \text{(A-1,1)}$$

Passa-se agora ao domínio da frequência, introduzindo as seguintes transformadas:

1) Transformada do impulso.

$$\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, \exp(-j\omega\tau)\, d\tau$$

2) Transformada da sua função de autocorrelação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau)\, \exp(-j\omega\tau)\, d\tau = \Gamma(\omega)\, \Gamma^*(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2$$

3) Transformada da função de auto-correlação da sucessão (m) da população considerada.

$$W_N^{(m)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_N^{(m)}(\tau)\, \exp(-j\omega\tau)\, d\tau$$

Esta transformada pode imediatamente escrever-se, partindo de (A-1, 1) e usando a expressão de 2),

$$W_N^{(m)}(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 \sum_{p=-N}^{+N} \sum_{s=p-N}^{p+N} x_p^{(m)}\, x_{p-s}^{(m)}\, \exp(-js\omega T) \qquad \text{(A-1,2)}$$

Admitindo que para cada membro da população, quando se deixar crescer indefinidamente a sua extensão, existe o limite,

$$P^{(m)}(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{(2N+1)\, T} W_N^{(m)}(\omega)$$

ele traduzirá a densidade espectral correspondente a esse membro, expressa por Hz de largura de banda, isto é de tal modo que o valor quadrático médio da sucessão $x^{(m)}(t)$ seja dado por,

$$\left(X_{ef}^{(m)}\right)^2 = \int_0^{\infty} P^{(m)}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Se se admitir a estacionaridade da estatística das sucessões de amplitudes $x_k^{(m)}$, o somatório interno da expressão (A-1, 2) será independente de p, sendo o resultado do somatório externo em p simplesmente o resultado do produto do somatório interno em s pelo número de parcelas em p, isto é, $(2N+1)$, pelo que se obtém no limite $N \to \infty$.

$$P^{(m)}(\omega) = \frac{2}{T} |\Gamma(\omega)|^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} x_p^{(m)}\, x_{p-s}^{(m)}\, \exp(-js\omega T)$$

Finalmente, fazendo a média sobre a população e representando por X_s o valor expectável do produto $x_p x_{p-s}$ que só dependerá de s,

$$X_s = \langle x_p x_{p-s} \rangle$$

tem-se para valor expectável da densidade espectral,

$$\langle P(\omega) \rangle = \frac{2}{T} |\Gamma(\omega)|^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} X_s\, \exp(-js\omega T)$$

ou ainda, dado que X_s será par na sua dependência de s,

$$<P(\omega)> = \frac{2}{T} |\Gamma(\omega)|^2 \left[X_0 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} X_s \cos(s\omega T) \right]$$

Admitindo que se trata de fenómenos estocásticos ergódicos, as médias sobre a população podem ser igualmente encaradas como médias ao longo do tempo relativas a um qualquer membro da população.

Apêndice - 2.

Considere-se um filtro passa-baixo de função de transferência racional G(s), excitado por flutuações estocásticas de espectro branco caracterizado pela densidade espectral constante, independente de ω, η^2 (em V^2Hz^{-1}).

Nestas circunstâncias a função de auto-correlação das flutuações à saída será dada por,

$$F(\tau) = \frac{\eta^2}{2} \int_{s=-j\infty}^{s=+j\infty} G(s)G(-s) \quad \exp(s\tau) \frac{ds}{2\pi j}$$

A função $F(\tau)$ é par e pode ser obtida no domínio $\tau > 0$ completando o eixo imaginário, ao longo do qual está definido o integral, com a semi-circunferência no infinito do semi-plano Re $\{s\} < 0$, que nestas circunstâncias não contribui para o integral estendido ao contorno fechado assim formado.

O resultado pode assim ser expresso imediatamente em termos dos resíduos da função integranda nos polos abarcados pelo contorno.

No caso presente, trata-se de dois polos reais distintos correspondentes às constantes de tempo T_0 e T_1.

$$G(s)G(-s) = \frac{1}{(1+sT_0)(1+sT_1)} \frac{1}{(1-sT_0)(1-sT_1)}$$

Calculados os resíduos nos polos do primeiro factor obtém-se,

$$F(\tau) = \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{1}{2T_0} \frac{T_0^2}{T_0^2 - T_1^2} \exp(-|\tau|/T_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2T_1} \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_0^2} \exp(-|\tau|/T_1) \right] \qquad \text{(A-2, 1)}$$

Se nesta expressão fizermos $T_0 \to 0$, obtém-se a função de auto-correlação das flutuações y(t) à entrada do retentor, contando pois com o efeito apenas do filtro que precede o retentor, e que será então,

$$Y(\tau) = \frac{\eta^2}{4T_1} \exp(-|\tau|/T_1)$$

O valor quadrático médio das flutuações à entrada do retentor obtém-se tomando esta função para $\tau = 0$,

$$Y_{ef}^2 = Y(0) = \frac{\eta^2}{4T_1}$$

o que permite substituir em (A-2, 1) η^2 pelo seu valor expresso em termos de Y_{ef}^2,

$$\frac{\eta^2}{2} = 2T_1 Y_{ef}^2$$

obtendo-se assim o resultado expresso por (6.2) e (6.3) no texto.

NÚMERO 436 NOVEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 624.074.2

Teorias de cascas envolvendo momentos de ordem superior à primeira [*]

EDUARDO ROMANO DE ARANTES E OLIVEIRA [1]

RESUMO

Tendo o desenvolvimento extraordinário dos métodos numéricos, e em especial do método dos elementos finitos, despertado interesse pela construção de novos modelos estruturais, é objectivo do trabalho apresentar e comparar duas teorias de cascas nas quais as tensões generalizadas são as resultantes e os momentos de qualquer ordem das tensões distribuidas na espessura. Na base do trabalho está a consideração de que o conhecimento dos momentos de ordem superior à primeira permite mais precisa determinação da distribuição das tensões que a que pode ser obtida de uma teoria de tipo convencional.

SUMMARY

Considering the interest of new structural models which the expansion of the numerical techniques of analysis, like the finite element method, very much increased, the aim of the paper is the presentation and comparison of two theories of shells in which the generalized stresses are the resultants and higher order moments of the stresses distributed in the thickness. The basic idea of the paper is the fact that the knowledge of higher order moments permits a more precise determination of the stress distribution that the one which can be provided by a theory of a more convencional kind.

1 — O INTERESSE DE TEORIAS ENVOLVENDO MOMENTOS DE ORDEM SUPERIOR À PRIMEIRA

Uma função que se distribua uniformemente num intervalo pode ser completamente definida nesse intervalo pelo seu valor médio.

O valor médio (ou momento de ordem zero) e o momento de primeira ordem relativamente a um dado ponto chegam por outro lado para definir uma função que se distribua linearmente.

De uma maneira geral, uma distribuição polinomial de grau N, como qualquer distribuição dependente de N+1 parâmetros, é completamente definida pelo conjunto dos seus momentos de ordem não menor que zero e não maior do que N. E um conhecido teorema afirma que qualquer distribuição limitada é univocamente determinada pela sucessão de todos os seus momentos. [1]

Ora, sendo as tensões generalizadas, nas teorias convencionais das peças laminares (ou cascas), resultantes e momentos de primeira ordem das tensões efectivas [2], as referidas teorias só poderão permitir o cálculo destas tensões se se lhes associar uma hipótese que faça depender de dois únicos parâmetros a sua distribuição na espessura.

Tal é por exemplo a que lhes admite uma distribuição linear, hipótese esta que se aproxima excelentemente da realidade no caso das cascas finas, isto é, daquelas em que a espessura é muito pequena em comparação com os raios de curvatura ou com outras dimensões características em jogo, mas já não no caso das cascas espessas, para a análise das quais várias teorias [2] têm sido apresentadas que podem ser olhadas como aperfeiçoamentos da teoria das cascas finas na forma que Love lhe deu.

Tais complicações não devem porém fazer esquecer o ponto fundamental de que qualquer hipótese que faça depender de dois únicos parâmetros a distribuição das tensões na espessura não pode representar mais que uma simulação muito grosseira da realidade.

Por outras palavras, só teorias envolvendo momentos de ordem superior à primeira poderão então conduzir a resultados satisfatórios, isto é, a resulta-

(*) Comunicação apresentada ao 1.º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada.

(1) Professor Catedrático de Engenharia Civil, investigador do CEMUL.

(2) Exceptuam-se as tensões tangenciais transversais cuja distribuição (parabólica anulando-se nas extremidades do intervalo) depende de um único parâmetro, e às quais se associam portanto somente as resultantes, vulgarmente designadas por esforços transversos.

dos suficientemente aproximados dos fornecidos pela teoria tridimensional, a qual não fixa em princípio, como é sabido, qualquer limitação à variação das grandezas na direcção perpendicular à superfície média.

O presente trabalho tem por objectivo apresentar e comparar duas dessas teorias com base em relatórios que, embora elaborados pelo autor há já alguns anos, nunca tiveram mais que uma difusão restrita [3, 4].

Observa-se que o que vai dizer-se sobre cascas poderia ser dito sobre barras. A adaptação não seria difícil, e só para não complicar mais o trabalho nada se dirá sobre o assunto. Não se deixa de mencionar, no entanto, que uma das aplicações mais interessantes de uma teoria com momentos de ordem superior à primeira parece poder fazer-se na análise das chamadas vigas-paredes [5]. Não houve infelizmente tempo para a discutir na presente comunicação, mas o autor não deixará de a incluir nas suas preocupações futuras.

2 — SISTEMA DE COORDENADAS

Serão usadas coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3 tais que a superfície coordenada $\xi_3 = 0$ coincida com a superfície média S e qualquer linha correspondente a valores constantes de ξ_1 e ξ_2 seja recta e perpendicular a S.

Simbolizam-se com $h_i\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ os factores de escala (parâmetros de Lamé) associados com as coordenadas ξ_i e faz-se h_3 constante e igual à unidade.

Supõe-se ainda que as linhas coordenadas pertencentes à superfície média são linhas de curvatura principal dessa superfície, o que tem por consequência que o sistema de coordenadas seja ortogonal em todo o espaço e os versores tangentes às linhas coordenadas deixem de depender da coordenada ξ_3, isto é,

$$\underset{\sim}{a}_{i,3} = \underset{\sim}{0} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

Simbolizando com h_1°, h_2°, R_1° e R_2° os factores de escala e raios de curvatura principais em pontos da superfície média, tem-se

$$\underset{\sim}{a}_{3,\alpha} = \frac{h_\alpha^\circ}{R_\alpha^\circ}\, \underset{\sim}{a}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{2.2}$$

Supõe-se que os índices gregos podem tomar os valores 1 e 2, podendo os latinos tomar os valores 1, 2 e 3.

Observa-se que as grandezas referidas à superfície média (assinaladas com o índice °) poderão ser consideradas, já que correspondem a um valor fixo de ξ_3 ($\xi_3 = 0$), como funções exclusivas de ξ_1 e ξ_2.

Represente-se agora por λ_α o cociente entre o factor de escala $h_\alpha\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ num ponto arbitrário da casca e o factor de escala $h_\alpha^\circ\ (\xi_1, \xi_2)$ no ponto da superfície média com as mesmas coordenadas ξ_α. Demonstra-se[6] que

$$\lambda_\alpha = 1 + \frac{\xi_3}{R_\alpha^\circ} \tag{2.3}$$

A fronteira da casca, considerada como um corpo tridimensional é composta por duas partes. A primeira, Σ_f, é formada por porções de duas superfícies com equações $\xi_3 = \pm 1/2\ e\ (\xi_1, \xi_2)$ em que e representa a espessura. A segunda, Σ_b, é-o por uma ou mais superfícies com equações do tipo $f\ (\xi_1, \xi_2) = O$.

Designe-se por Γ a intersecção de Σ_b com S.

Qualquer ponto de Σ_b pode ser referido a um sistema de coordenadas ξ, ξ_3, sendo as linhas coordenadas correspondentes a ξ_3 rectas e normais a Γ.

Representa-se por λ a relação entre os valores do factor de escala h associado com a coordenada ξ num determinado ponto de Σ_b e o valor do mesmo factor de escala no ponto de Γ com a mesma coordenada ξ. Tem-se pois

$$\lambda = \frac{h\ (\xi, \xi_3)}{h^\circ\ (\xi)} \tag{2.4}$$

λ desempenha evidentemente o mesmo papel em Σ_b que as grandezas λ_α nas superfícies coordenadas ξ_α = constante.

3 — UMA PRIMEIRA TEORIA

Qualquer modelo estrutural deve apresentar o mesmo esquema que a teoria tridimensional, [7] isto é, três grupos de equações (equilíbrio, deformações-deslocamentos, tensões-deformações) envolvendo três espécies de grandezas (tensões-deformações, deslocamentos) que se denominarão generalizadas (no sentido de Lagrange) por oposição às efectivas que aparecem no modelo tridimensional. Supõe-se por outro lado que se verifica o princípio do trabalho, o qual, combinado com as equações de equilíbrio, fornece as equações deformações-deslocamentos, e, com as equações deformações-deslocamentos, fornece as equações de equilíbrio.

A melhor maneira de estabelecer uma teoria envolvendo momentos de ordem superior à primeira será justamente começar por estabelecer as equações de equilíbrio e deduzir seguidamente as relações deformações-deslocamentos recorrendo ao princípio do trabalho. [6]

O primeiro problema que se põe é pois o de estabelecer as equações de equilíbrio, as quais deverão necessariamente ser exactas ou, mais precisamente, deduzidas das equações de equilíbrio da teoria tri-dimensional.

Estas, em coordenadas curvilíneas ortogonais, são

$$(h_2\, h_3\, \underset{\sim}{\sigma}_1)_{,1} + (h_3\, h_1\, \underset{\sim}{\sigma}_2)_{,2} + (h_1\, h_2\, \underset{\sim}{\sigma}_3)_{,3} + h_1\, h_2\, h_3 \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{O}$$

$$\underset{\sim}{a}_1 \wedge \underset{\sim}{\sigma}_1 + \underset{\sim}{a}_2 \wedge \underset{\sim}{\sigma}_2 + \underset{\sim}{a}_3 \wedge \underset{\sim}{\sigma}_3 + \underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{O} \qquad (3.2)$$

em que os vectores $\underset{\sim}{\sigma}_i$ são os vectores das tensões efectivas actuantes nas faces normais aos versores $\underset{\sim}{a}_i$ e os vectores $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ representam as densidades das forças e momentos exteriores distribuídos no volume do corpo.

No presente capítulo supor-se-á $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{0}$, o que equivale a admitir que o tensor das tensões é simétrico, isto é, que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Atendendo ao que ficou escrito em 2, a equação (3.1) pode transformar-se em

$$(h_2^{\circ}\, \lambda_2\, \underset{\sim}{\sigma}_1)_{,1} + (h_1^{\circ}\, \lambda_1\, \underset{\sim}{\sigma}_2)_{,2} + (h_1^{\circ}\, h_2^{\circ}\, \lambda_1\, \lambda_2\, \underset{\sim}{\sigma}_3)_{,3} +$$

$$+ h_1^{\circ}\, h_2^{\circ}\, \lambda_1\, \lambda_2\, \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{O} \qquad (3.3)$$

Multipliquem-se agora externamente ambos os membros de (3.3) por $\xi_3\, \underset{\sim}{a}_3$ e integrem-se seguidamente relativamente a ξ_3 entre $-e/_2$ e $e/_2$. Obtém-se

$$\int_{-e/_2}^{e/_2} \xi_3^{\,n}\, \underset{\sim}{a}_3 \wedge \left[\sum_{\alpha} (h_{\bar{\alpha}}^{\circ}\, \lambda_{\bar{\alpha}}\, \underset{\sim}{\sigma}_{\alpha})_{,\alpha} + (h_1^{\circ}\, h_2^{\circ}\, \lambda_1\, \lambda_2\, \underset{\sim}{\sigma}_3)_{,3} + \right.$$

$$\left. + h_1^{\circ}\, h_2^{\circ}\, \lambda_1\, \lambda_2\, \underset{\sim}{X} \right] d\,\xi_3 = \underset{\sim}{O} \qquad (3.4)$$

em que $\bar{\alpha}$ é igual a 2 quando α for igual a 1 e igual a 1 quando α for igual a 2.

Transformando [3] a equação (3.4) e supondo $n \geqslant 1$, obtém-se

$$\sum_{\alpha} \left[(h_{\bar{\alpha}}^{\circ}\, \underset{\sim}{a}_3 \wedge \underset{\sim}{N}_{\alpha}^{(n)})_{,\alpha} + h_1^{\circ}\, h_2^{\circ}\, \underset{\sim}{a}_{\alpha} \wedge \underset{\sim}{N}_{\alpha}^{(n-1)} \right] +$$

$$+ h_1^{\circ}\, h_2^{\circ}\, \underset{\sim}{m}^{(n)} = \underset{\sim}{O} \qquad (3.5)$$

em que

$$\underset{\sim}{N}_{\alpha}^{(n)} = N_{\alpha i}^{(n)}\, \underset{\sim}{a}_i \qquad (3.6)$$

sendo

$$N_{\alpha\beta}^{(n)} = \int_{-e/2}^{e/2} \xi_3^{\,n}\, \lambda_{\bar{\alpha}}\, \sigma_{\alpha\beta}\, d\,\xi_3 \qquad (3.7)$$

$$N_{\alpha 3}^{(n)} = \int_{-e/2}^{e/2} \xi_3^{\,n}\, (1 + n\,\lambda_{\alpha})\, \lambda_{\bar{\alpha}}\, \sigma_{\alpha 3}\, d\,\xi_3 \qquad (3.8)$$

O vector $\underset{\sim}{m}^{(n)}$, função das forças exteriores actuantes na casca, tem a expressão

$$\underset{\sim}{m}^{(n)} = \underset{\sim}{a}_3 \wedge \left\{ \int_{-e/s}^{e/2} \xi_3^{\,n}\, \lambda_1\, \lambda_2\, \underset{\sim}{X}\, d\,\xi_3 + \right.$$

$$\left. + \left[\xi_3^{\,n}\, \lambda_1\, \lambda_2\, \underset{\sim}{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{e_{11}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{e_{12}}{h_2}\right)^2} \right]_{-e/2}^{e/2} \right\} \qquad (3.9)$$

a qual, evidentemente, se simplifica se a espessura for constante. Observa-se que $\underset{\sim}{m}^{(n)}$ não tem componente paralela a $\underset{\sim}{a}_3$.

A equação (3.5) é válida, como se disse, para $n \geqslant 1$. Para $n=0$, pode estabelecer-se facilmente a equação

$$\sum_{\alpha} (h_{\bar{\alpha}}^{\circ}\, \underset{\sim}{N}_{\alpha}^{(o)})_{,\alpha} + h_1^{\circ}\, h_2^{\circ}\, \underset{\sim}{p}^{(o)} = \underset{\sim}{O} \qquad (3.10)$$

na qual

$$\underset{\sim}{p}^{(o)} = \int_{-e/2}^{e/2} \lambda_1\, \lambda_2\, \underset{\sim}{X}\, d\,\xi_3 +$$

$$+ \left[\lambda_1\, \lambda_2\, \underset{\sim}{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{e_{11}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{e_{12}}{h_2}\right)^2} \right]_{-e/2}^{e/2} \qquad (3.11)$$

Observa-se que tanto a equação (3.10) como a equação (3.5), particularizada para $n=1$, aparecem na teoria convencional.

Estabelecidas as equações, podemos agora indicar as tensões generalizadas que intervêm na teoria. São elas as resultantes e momentos $N_{\alpha i}^{(n)}$ que aparecem nas equações de equilíbrio.

Sendo N o máximo valor de n, as equações de equilíbrio envolvem todas as grandezas $N_{\alpha\beta}^{(n)}$ desde $n=0$ até $n=N$ e todas as grandezas $N_{\alpha 3}^{(n)}$ desde $n=0$ até $n=N-1$. As grandezas $N_{\alpha 3}^{(N)}$ não intervêm nas equações e não serão pois tomadas para tensões generalizadas.

As tensões generalizadas são pois $6\,N+4$ e as equações de equilíbrio $3\,(N+1)$.

Na teoria convencional, tem-se $N=1$, pelo que as tensões são 10 e 6 as equações de equilíbrio.

As equações de equilíbrio a satisfazer no contorno Γ, ou sobre qualquer linha traçada sobre S, podem ser obtidas procedendo com a equação

$$\underset{\sim}{\sigma}_\alpha \, \upsilon_\alpha = \underset{\sim}{\tau} \tag{3.12}$$

do mesmo modo que com a equação (3.3). Obtém-se

$$\underset{\sim}{a}_3 \wedge \underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \upsilon_\alpha^{o} = \underset{\sim}{M}^{(n)} \tag{3.13}$$

para $n \geqslant 1$ e

$$\underset{\sim}{N}_\alpha^{(o)} \upsilon_\alpha^{o} = \underset{\sim}{N}^{(o)} \tag{3.14}$$

para $n=0$, sendo

$$\underset{\sim}{M}^{(n)} = \underset{\sim}{a}_3 \wedge \int_{-e/2}^{e/2} \lambda \xi_3 \underset{\sim}{\sigma} \, d\xi_3 \tag{3.15}$$

$$\underset{\sim}{N}^{(o)} = \int_{-e/2}^{e/2} \lambda \, \underset{\sim}{\sigma} \, d\xi_3 \tag{3.16}$$

As equações deformações-deslocamentos podem agora ser estabelecidas com toda a facilidade [3] utilizando o princípio do trabalho cuja expressão é

$$\sum_{n=o}^{N} \sum_{\alpha} \int_S \underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \cdot \underset{\sim}{E}_\alpha^{(n)} \, dS = \int_S \left[\underset{\sim}{p}^{(o)} \cdot \underset{\sim}{U}^{(o)} + \sum_{n=1}^{N} \underset{\sim}{m}^{(n)} \cdot \underset{\sim}{V}^{(n)} \right] dS + \int_\Gamma \left[\underset{\sim}{N}^{(o)} \cdot \underset{\sim}{U}^{(o)} + \sum_{n=1}^{N} \underset{\sim}{M}^{(n)} \cdot \underset{\sim}{V}^{(n)} \right] d\Gamma \tag{3.17}$$

As tensões $\underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)}$ supõem-se equilibradas pelos campos de forças exteriores definidos pelos vectores $\underset{\sim}{p}^{(o)}$ e $\underset{\sim}{m}^{(n)}$ em S e $\underset{\sim}{N}^{(o)}$ e $\underset{\sim}{M}^{(n)}$ em Γ.

As deformações $\underset{\sim}{E}_a^{(n)}$ definem-se como os multiplicadores das tensões $\underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)}$ na expressão do trabalho das forças internas, e os deslocamentos como multiplicadores das forças na do trabalho das forças externas.

Introduzindo as equações de equilíbrio em (3.17) e aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$\sum_{\alpha} \sum_{n=o}^{N} \int_S \underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \cdot \underset{\sim}{E}_\alpha^{(n)} \, dS = \sum_{\alpha} \left[\int_S \underset{\sim}{N}_\alpha^{(o)} \cdot \left(\frac{\underset{\sim}{U}_{,\alpha}^{(o)}}{h_\alpha^{o}} - \underset{\sim}{V}^{(1)} \wedge \underset{\sim}{a}_\alpha \right) dS + \sum_{n=1}^{N=1} \int_S \underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \cdot \left(\frac{\underset{\sim}{V}_{,\alpha}^{(n)}}{h_\alpha^{o}} \wedge \underset{\sim}{a}_3 - \underset{\sim}{V}^{(n+1)} \wedge \underset{\sim}{a}_\alpha \right) dS + \int_S \underset{\sim}{N}_\alpha^{(N)} \cdot \frac{\underset{\sim}{V}_{,\alpha}^{(N)}}{h_\alpha^{o}} \wedge \underset{\sim}{a}_3 \, dS \right] \tag{3.18}$$

e, como esta equação deve verificar-se para valores contínuos mas arbitrários das tensões $\underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)}$, obtém-se as seguintes $6N+4$ equações

$$\underset{\sim}{E}_\alpha^{(o)} = \frac{\underset{\sim}{U}_{,\alpha}^{(o)}}{h_\alpha^{(o)}} - \underset{\sim}{V}^{(1)} \wedge \underset{\sim}{a}_\alpha \tag{3.19}$$

$$\underset{\sim}{E}_\alpha^{(n)} = \frac{\underset{\sim}{V}_{,\alpha}^{(n)}}{h_\alpha^{(o)}} \wedge \underset{\sim}{a}_3 - \underset{\sim}{V}^{(n+1)} \wedge \underset{\sim}{a}_\alpha \tag{3.20}$$

$$E_{\alpha\beta}^{(N)} = \frac{\underset{\sim}{V}_{,\alpha}^{(N)}}{h_\alpha^{o}} \wedge \underset{\sim}{a}_3 \cdot \underset{\sim}{a}_\beta \tag{3.21}$$

que relacionam $6N+4$ deformações generalizadas com $3(N+1)$ deslocamentos generalizados. Para $N=1$, obtêm-se as conhecidas equações da teoria convencional.

Quanto às equações tensões-deformações, elas têm a forma

$$E_{\alpha i}^{(n)} = \frac{\partial W_2^{*} (N_{\alpha i}^{(n)})}{\partial N_{\alpha i}^{(n)}} \tag{3.22}$$

em que a função $W_2^{*} (N_{\alpha i}^{(n)})$, densidade bidimensional da energia complementar, pode ser determinada a partir de

$$W_2^{(*)}(N_{\alpha 1}^{(n)}) = \int_{-e/2}^{e/2} W_3^{*} \left[\sigma_{jk} (N_{\alpha 1}^{(n)}) \right] \lambda_1 \lambda_2 \alpha \, d\xi_3 \qquad (3.23)$$

em que W_3 é a densidade tridimensional.

As equações tensões-deformações (3.22) poderão ser desenvolvidas somente se for introduzida uma hipótese que permita exprimir as tensões efectivas em termos das generalizadas.

Finalmente, as condições de fronteira são 3+2 N, a saber

$$\underset{\sim}{N}_\alpha^{(o)} \, \upsilon_\alpha^o = \overline{\underset{\sim}{N}}^{(o)} \qquad (3.24)$$

$$\underset{\sim}{a}_3 \wedge \underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \, \upsilon_\alpha^o = \overline{\underset{\sim}{M}}^{(n)} \qquad (3.25)$$

sobre um troço Γ_1 de Γ e

$$\underset{\sim}{U}^{(o)} = \overline{\underset{\sim}{U}}^{(o)} \qquad (3.26)$$

$$\underset{\sim}{V}_\alpha^{(n)} = \overline{\underset{\sim}{V}}_\alpha^{(n)} \qquad (3.27)$$

sobre o troço complementar, Γ_2 .

4 — UMA SEGUNDA TEORIA

A teoria bidimensional que acaba de ser apresentada representa aparentemente uma aceitável generalização da teoria convencional (correspondente a N=1).

Uma crítica cuidadosa não pode deixar no entanto de lhe encontrar o grave defeito de a sucessão das soluções geradas por sucessivas teorias bidimensionais correspondentes a valores crescentes de N não tender para a solução correspondente à teoria tridimensional quando N tende para infinito.

Para concluir que assim é basta notar que, dado que a componente X_3 da densidade das forças de massa não intervém nos vectores $\underset{\sim}{m}^{(n)}$, a equação (3.5) não envolve esta componente. Por este motivo, as soluções bidimensionais não dependem do modo como X_3 se distribui na espessura. Ora, como tal não acontece com a solução tridimensional, segue-se que não pode esperar-se atingir a solução exacta fazendo tender N para infinito.

Igual conclusão se poderia tirar do facto de a equação (3.13) não envolver a componente σ_3 do vector $\underset{\sim}{\sigma}$.

Entre as tensões generalizadas não aparecem por outro lado momentos das tensões σ_{33}, o que torna impossível o cálculo destas em termos daquelas. Observa-se que isto já acontece na teoria convencional que também não fornece qualquer informação sobre as tensões σ_{33}.

Na teoria que seguidamente se apresenta eliminam-se as imperfeições apontadas na primeira.

Parte-se como anteriormente das equações de equilíbrio (3.3).

Multiplicando ambos os membros por ξ_3^n e integrando obtém-se:

$$\int_{-e/2}^{e/2} \sum_\alpha \left(\overset{o}{h}_{\bar\alpha} \lambda_{\bar\alpha} \xi_3^n \underset{\sim}{\sigma}_\alpha \right)_{,\alpha} d\xi_3 +$$

$$+ \overset{o}{h}_1 \overset{o}{h}_2 \int_{-e/2}^{e/2} \xi_3^n \left(\lambda_1 \lambda_2 \underset{\sim}{\sigma}_3 \right)_{,3} d\xi_3 +$$

$$+ \overset{o}{h}_1 \overset{o}{h}_2 \int_{-e/2}^{e/2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_3^n \underset{\sim}{X} \, d\xi_3 = \underset{\sim}{O} \qquad (4.1)$$

equação esta que, transformada, dá

$$\sum_\alpha \left(\overset{o}{h}_{\bar\alpha} \underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \right) - \overset{o}{h}_1 \overset{o}{h}_2 \, n \, \underset{\sim}{N}_3^{(n-1)} + h_1 h_2 \underset{\sim}{p}^{(n)} = \underset{\sim}{O} \qquad (4.2)$$

desde que $n \geqslant 1$.

Para n=0, tem-se, em vez de (4.2),

$$\sum_\alpha \left(\overset{o}{h}_{\bar\alpha} \underset{\sim}{N}_\alpha^{(o)} \right)_{,\alpha} + \overset{o}{h}_1 \overset{o}{h}_2 \underset{\sim}{p}^{(o)} = \underset{\sim}{O} \qquad (4.3)$$

sendo

$$\underset{\sim}{p}^{(n)} = \int_{-e/2}^{e/2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_3^n \underset{\sim}{X} \, d\xi_3 +$$

$$+ \left[\xi_3^n \lambda_1 \lambda_2 \underset{\sim}{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{e_{,1}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{e_{,2}}{h_2}\right)^2} \right]_{-e/2}^{e/2} \qquad (4.4)$$

por qualquer valor de $n \geqslant 0$.

As componentes dos vectores $\underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)}$ e $\underset{\sim}{N}_3^{(n)}$ não devem ser consideradas como completamente independentes. Com efeito, supondo $Y_1 = Y_2 = 0$, $\sigma_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}$ e, portanto, obtém-se

$$N_{3\alpha}^{(n-1)} = N_{\alpha 3}^{(n-1)} + \frac{N_{\alpha 3}^{(n)}}{R_\alpha^o} \qquad (4.5)$$

Por outro lado, como $\sigma_{12} - \sigma_{21} = Y_3$,

$$N_{12}^{(n-1)} - N_{21}^{(n-1)} + \frac{N_{12}^{(n)}}{R_1^o} - \frac{N_{21}^{(n)}}{R_2^o} + m_3^{(n-1)} = O \qquad (4.6)$$

em que

$$m_3^{(n)} = \int_{-e/2}^{e/2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_3^n Y_3 \, d\xi_3 \qquad (4.7)$$

Introduzindo (4.5) em (4.2), obtém-se

$$\sum_\alpha \left(h_{\bar\alpha}^{(o)} \underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \right)_{,\alpha} - \overset{o}{h}_1 \overset{o}{h}_2 \, n \left[\sum_\alpha \left(N_{\alpha 3}^{(n-1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{N_{\alpha\tau}^{(n)}}{\overset{o}{R}_\alpha} \right) \underset{\sim}{a}_\alpha + N_{33}^{(n-1)} \underset{\sim}{a}_3 \right] + \overset{o}{h}_1 \overset{o}{h}_2 \underset{\sim}{p}^{(n)} = \underset{\sim}{O} \qquad (4.8)$$

As equações (4.3), (4.6) e 4.7), consideradas para valores de n não superiores a N, formam o conjunto das equações de equilíbrio da teoria. O seu número total é 4 N+3.

As tensões generalizadas são todas as resultantes e momentos envolvidos nas equações de equilíbrio. Como estas contêm todos os vectores $\underset{\sim}{N}^{(n)}$ para $0 \leqslant n \leqslant N$, tem-se 6 (N+1) tensões generalizadas $N_{\alpha j}^{(n)}$. Aparecem por outro lado N tensões $N_{33}^{(n)}$ para $0 \leqslant n \leqslant N-1$, o que perfaz um total de 6 (N+1) + +N=7 N+6.

As equações de equilíbrio a satisfazer sobre Γ ou qualquer outra linha traçada sobre S,

$$\underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \, \upsilon_\alpha^0 = \underset{\sim}{N}^{(n)} \qquad (4.9)$$

obtêm-se a partir de (3.1) multiplicando por $\lambda \, \xi_3^n$ e integrando. Observa-se que

$$\underset{\sim}{N}^{(n)} = \int_{-e/2}^{e/2} \lambda \, \xi_3^n \, \underset{\sim}{\sigma} \, d\xi_3 \qquad (4.10)$$

A utilização do princípio dos trabalhos virtuais[4] conduz às seguintes 7 N+6 equações deformações--deslocamentos

$$\underset{\sim}{E}_\alpha^{(o)} = \frac{\underset{\sim}{U}_{,\alpha}^{(o)}}{\overset{o}{h}_\alpha} + U_\alpha^{(1)} \underset{\sim}{a}_3 - V_3^{(o)} \underset{\sim}{a}_\alpha \wedge \underset{\sim}{a}_3 \qquad (4.11)$$

$$\underset{\sim}{E}_\alpha^{(n)} = \frac{\underset{\sim}{U}_{,\alpha}^{(n)}}{\overset{o}{h}_\alpha} + \left[n \frac{U_\alpha^{(n)}}{\overset{o}{R}_\alpha} + (n+1) U_\alpha^{(n+1)} \right] \underset{\sim}{a}_3 -$$

$$- \underset{\sim}{a}_\alpha \wedge \underset{\sim}{a}_3 \left(V_3^{(n)} + \frac{V_3^{(n-1)}}{\overset{o}{R}_\alpha} \right) \text{ para } 0 < n < N \qquad (4.12)$$

$$\underset{\sim}{E}_\alpha^{(N)} = \frac{\underset{\sim}{U}_{,\alpha}^{(N)}}{\overset{o}{h}_\alpha} + N \frac{U_\alpha^{(N)}}{\overset{o}{R}_\alpha} \underset{\sim}{a}_3 - \underset{\sim}{a}_\alpha \wedge \underset{\sim}{a}_3 \frac{V_3^{(N-1)}}{\overset{o}{R}_\alpha} \qquad (4.13)$$

$$E_{33}^{(n)} = (n+1) \, U_3^{(n+1)} \text{ para } 0 \leqslant n < N \qquad (4.14)$$

nas quais $V_3^{(n)}$ representa a componente de deslocamento associada com $m_3^{(n)}$.

As 3 (N+1) componentes dos vectores $\underset{\sim}{U}^{(n)}$ e as N grandezas $V_3^{(n)}$, multiplicadores dos parâmetros definidores das forças exteriores na expressão do trabalho, são os deslocamentos generalizados.

As 7 N+6 deformações generalizadas, multiplicadores das tensões, são por sua vez componentes dos vectores $\underset{\sim}{U}^{(n)}$ e as grandezas $V_3^{(n)}$.

As equações tensões-deformações são as equações (3.22) e ainda

$$E_{33}^{(n)} = \frac{\partial \dot{W}_2}{\partial N_{33}^{(n)}} \qquad (4.15)$$

Quanto às condições de fronteira, são 3 (N+1) em cada ponto de Γ, a saber,

$$\underset{\sim}{N}_\alpha^{(n)} \, \upsilon_\alpha = \bar{\underset{\sim}{N}}^{(n)} \quad \text{em } \Gamma_1 \qquad (4.16)$$

$$\underset{\sim}{U}^{(n)} = \bar{\underset{\sim}{N}}^{(n)} \quad \text{em } \Gamma_2 \qquad (4.17)$$

5 — CONCLUSÕES

Foram apresentadas duas teorias.

Em ambas, N representa a ordem máxima dos momentos intervenientes.

A primeira contém 3 (N+1) equações de equilíbrio, 6 N+4 equações tensões-deformações e 6 N+4 equações deformações-deslocamentos, envolvendo 6 N+4 deformações e 3 (N+1) deslocamentos. Ao todo, 15 N+11 equações e 15 N+11 incógnitas.

A teoria convencional aparece como caso particular desta teoria, correspondente a N=1. As soluções fornecidas pela teoria não convergem porém para a solução tridimensional quando N tende para infinito.

A segunda teoria contém 4 N+3 equações de equilíbrio, 7 N+6 equações tensões-deformações e 7 N+6 equações deformações-deslocamentos, envolvendo 7 N+6 tensões, 7 N+6 deformações e 4 N+3 deslocamentos. Ao todo, 18 N+15 equações e incógnitas.

Esta teoria já não fornece a teoria convencional, uma vez particularizada para $N=1$. Envolve por outro lado mais incógnitas e equações que a primeira.

Estes inconvenientes são compensados pelas vantagens de a teoria dar informação sobre a distribuição de σ_{33} na espessura e, sobretudo, de as sucessões de soluções correspondentes a valores indefinidamente crescentes de N convergirem para as soluções geradas pela teoria tridimensional.

Como os valores de N devem manter-se pequenos nas eventuais aplicações, é possível que esta deficiência de convergência não tenha consequências práticas apreciáveis. Só a aplicação à resolução de problemas concretos permitirá tirar conclusões.

AGRADECIMENTO: Agradece-se à Fundação Calouste Gulbenkian que subsidiou este trabalho através do Projecto «Matemáticas Aplicadas à Engenharia Civil».

REFERÊNCIAS

1 — Cramér, H. — *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton University Press, 1951 (p. 177).

2 — Naghdi, P. M. — The Theory of Shells and Plates. *Handbuch* der Physik, Vol. VI a/2 Springer, 1972.

3 — Arantes e Oliveira, E. R. — A Theory of Shells Involving Moments of Arbitrary Order. Lisboa, LNEC, 1967.

4 — Arantes e Oliveira, E. R. — A Further Research on the Analysis of Shells Using Moments of Arbitrary Order. Lisboa, LNEC, 1967.

5 — Timoshenko, S., and Goodier, J. M. — *Theory of Elasticity,* 2nd Ed., McGraw-Hill, 1957.

6 — Arantes e Oliveira, E. R. — *Introdução à Teoria das Estruturas.* Lisboa, Ed. do autor, 1966.

7 — Arantes e Oliveira, E. R. — The Convergence Theorems and their Role in the Theory of Structures, *Proc. IUTAM Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures.* Liège, 1970.

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
Cálculo de Barragens — Abóbada Pelo Método dos Elementos Finitos	L. N. E. C. — Lisboa Terças e quartas-feiras, das 14 às 16h30, com início em 6 de Outubro - 1976
Comportamento de Edifícios sob a Acção dos Sismos	L. N. E. C. — Lisboa 5 a 7 de Dezembro - 76
Planos Locais e Política Urbana	L. N. E. C. — Lisboa 2.ª fase — Outubro - 76 3.ª fase — Dezembro - 76
6 ème conference international sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée	L. N. E. C. — Lisboa 2.ª fase — Outubro - 76 3.ª fase — Dezembro - 76
International Symposium on Freight Pipeline Under the sponsorship of the U. S. Department of transportation, the Department of Civil and Urban Engineering at the University of Pennsylvania will conduct an International Symposium on Freight Pipeline in Washington, D. C. on December 5-7, 1976. A number of international exports have been invited to present papers on various aspects of the subject including slurry, pneumatic, and capsule pipelines. Anyone interested in the symposium should contact I. Zandi, Room 113A Towne Building/D3, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19174.	Washington, U. S. A. 5-7 December 1976
Tráfego, Segurança e Traçado de Estradas	L. N. E. C. — Lisboa 4.º Trimestre de 1976
Codificação e Automatização da Informação do Projecto	L. N. E. C. — Lisboa Final de 76
Areas Residenciais Urbanas	L. N. E. C. — Lisboa 2.ª fase — Novembro - 1976 3.ª fase — 1.º Trimestre de 1977

NÚMERO 436 NOVEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 624.131.522.4:518

Aplicação da solução do problema de Mindlin na resolução do problema da estaca solicitada por uma força horizontal [*]

ANTÓNIO JOSÉ REIS [1]
EDUARDO BORGES PIRES [2]

SUMÁRIO

Com base na solução do problema de Mindlin, que considera o campo elástico gerado por uma força concentrada actuante num ponto interior dum semi-espaço, do qual se deduzem por integração os deslocamentos devidos a uma carga distribuida linearmente, apresenta-se um método para a resolução do problema da estaca cravada num solo homogéneo solicitada por uma força horizontal.

SUMMARY

The solution of Mindlin's problem, which considers the elastic field generated by a force concentrated in a point located within an elastic half-space, from which the effects of forces distributed on lines can be generated, is used for the solution of the problem of the pile acted by a horizontal force.

1 — INTRODUÇÃO

A resolução do problema da estaca solicitada por uma força horizontal no topo tem sido proposta por vários métodos e em especial pelo dos elementos finitos. Neste, o número de elementos a empregar, para uma razoável aproximação de resultados, é geralmente elevado. O método que se apresenta nesta comunicação, mais exacto embora menos geral, permite a comprovação, no caso de meios homogéneos, dos resultados obtidos pelo método dos elementos finitos.

Considerando-se válidas as hipóteses da linearidade física e geométrica, introduziu-se a hipótese simplificativa de a distribuição contínua correspondente às forças de contacto entre a estaca e o solo ser horizontal e paralela à força actuante no topo da estaca. A distribuição referida foi discretizada num conjunto de cargas triangulares elementares, impondo-se então a compatibilização, segundo a direcção da força, dos deslocamentos da estaca, considerada como peça linear, e do terreno, num número finito de pontos do eixo da estaca. Aplicou-se portanto o método dos esforços.

A determinação dos deslocamentos produzidos pelas cargas triangulares elementares implicou a resolução do problema da determinação dos efeitos produzidos por uma carga distribuida linearmente numa zona interior dum semi-espaço elástico.

2 — DESLOCAMENTOS PRODUZIDOS POR UMA CARGA LINEARMENTE DISTRIBUIDA NO INTERIOR DUM SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO

2.1 — O problema de Mindlin

Designemos por z o eixo normal à superfície do semi-espaço que contém o ponto de aplicação da força, a qual actua paralelamente à fronteira, segundo o eixo dos xx, fig. 1. O vector deslocamento num ponto genérico do semi-espaço, $\underset{\sim}{u} = u\,\underset{\sim}{e}_x + v\,\underset{\sim}{e}_y + w\,\underset{\sim}{e}_z$, exprime-se [1] por:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{B} - \frac{1}{4(1-\nu)}\,\underset{\sim}{\nabla}\,(\underset{\sim}{r}.\underset{\sim}{B} + \beta) \qquad (2.1.1)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson do meio, $\underset{\sim}{B}$ e β as funções de Papkovitch, $\underset{\sim}{\nabla}$ o operador vectorial

$$\underset{\sim}{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\underset{\sim}{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\underset{\sim}{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\underset{\sim}{e}_z$$

e $\underset{\sim}{r}$ o vector $\underset{\sim}{r} = x\,\underset{\sim}{e}_x + y\,\underset{\sim}{e}_y + z\,\underset{\sim}{e}_z$

Desprezando as forças de massa as funções $\underset{\sim}{B}$ e β verificam a equação de Laplace ou seja:

$$\nabla^2\underset{\sim}{B} = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla^2\beta = 0 \qquad (2.1.2)$$

(*) Comunicação apresentada ao 1.º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada.
(1) Eng.º Civil, Assistente do I. S. T., investigador do CEMUL.
(2) Eng.º Civil, Assistente do I. S. T., investigador do CEMUL.

Com base nas equações (2.1.2), Mindlin [1] determinou directamente, por aplicação da teoria do potencial, as funções de Papkovitch para o problema em questão:

$$\underset{\sim}{B} = \frac{P}{4\pi G}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\underset{\sim}{e}_x + \frac{P}{2\pi G}\left[\frac{x(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{cx}{R_2^3}\right]\underset{\sim}{e}_z \tag{2.1.3}$$

$$\beta = -\frac{P}{2\pi G}\left[\frac{x(1-2\nu)^2}{R_2+z+c} + \frac{cx(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)}\right] \tag{2.1.4}$$

em que G é o módulo de distorção do meio, c a coordenada z do ponto de aplicação da carga e R_1 e R_2 as funções:

$$R_1 = \left[x^2 + y^2 + (z-c)^2\right]^{1/2}$$
$$R_2 = \left[x^2 + y^2 + (z+c)^2\right]^{1/2} \tag{2.1.5}$$

Os deslocamentos (2.1.1) são portanto infinitos no ponto de aplicação da carga.

2.2 — O problema da carga distribuida linearmente numa zona interior dum semi-espaço elástico.

Atendendo às hipóteses simplificativas introduzidas em 1, determinaram-se apenas as componentes u do vector deslocamento $\underset{\sim}{u} = u\,\underset{\sim}{e}_x + v\,\underset{\sim}{e}_y + w\,\underset{\sim}{e}_z$ sobre o eixo do zz. Deste modo designando por u_P a componente u do deslocamento devido à carga concentrada P e atendendo à equação (2.1.1) temos:

$$u_P = B_x - \frac{1}{4(1-\nu)}\left[B_x + x\frac{\partial B_x}{\partial x} + y\frac{\partial B_y}{\partial x} + z\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right] \tag{2.2.1}$$

Atendendo às equações (2.2.1), (2.1.3-5) e à fig. 1 os deslocamentos u_P em $x=0$ serão:

$$\left(u_P\right)_{x=0} = \frac{(3-4\nu)P}{16\pi G(1-\nu)}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{P}{4(1-\nu)}\left\{\frac{z}{2\pi G}\left[\frac{1-2\nu}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{c}{R_2^3}\right] - \frac{1-2\nu}{2\pi G}\left[\frac{1-2\nu}{R_2+z+c} + \frac{c}{R_2(R_2+z+c)}\right]\right\} \tag{2.2.2}$$

Os deslocamentos u em $x=y=0$ devidos a uma carga linearmente distribuída $p=p_0+p_1c$ em $(-a \leqslant y \leqslant a;\ c_1 \leqslant z \leqslant c_2)$ serão dados por:

$$(u)_{x=y=0} = A(S_1+S_2) - \frac{1}{4(1-\nu)}\left\{zB[(1-2\nu)S_3 - S_4] + D[(1-2\nu)S_5 + S_6]\right\} \tag{2.2.3}$$

em que:

$$A = \frac{3-4\nu}{16\pi G(1-\nu)}\ ;\quad B = \frac{1}{2\pi G}\ ;\quad D = \frac{1-2\nu}{2\pi G} \tag{2.2.4}$$

$$S_1 = \int_{-a}^{a}\int_{c_1}^{c_2}\frac{p_0+p_1c}{[s^2+(z-c)^2]^{1/2}}\,dc\,ds \tag{2.2.5}$$

$$S_2 = \int_{-a}^{a}\int_{c_1}^{c_2}\frac{p_0+p_1c}{[s^2+(z+c)^2]^{1/2}}\,dc\,ds \tag{2.2.6}$$

$$S_3 = \int_{-a}^{a}\int_{c_1}^{c_2}\frac{p_0+p_1c}{[s^2+(z+c)^2]^{1/2}\left\{[s^2+(z+c)^2]^{1/2}+z+c\right\}}\,dc\,ds \tag{2.2.7}$$

$$S_4 = \int_{-a}^{a}\int_{c_1}^{c_2}\frac{c(p_0+p_1c)}{[s^2+(z+c)^2]^{3/2}}\,dc\,ds \tag{2.2.8}$$

$$S_5 = \int_{-a}^{a}\int_{c_1}^{c_2}\frac{p_0+p_1c}{[s^2+(z+c)^2]^{1/2}+z+c}\,dc\,ds \tag{2.2.9}$$

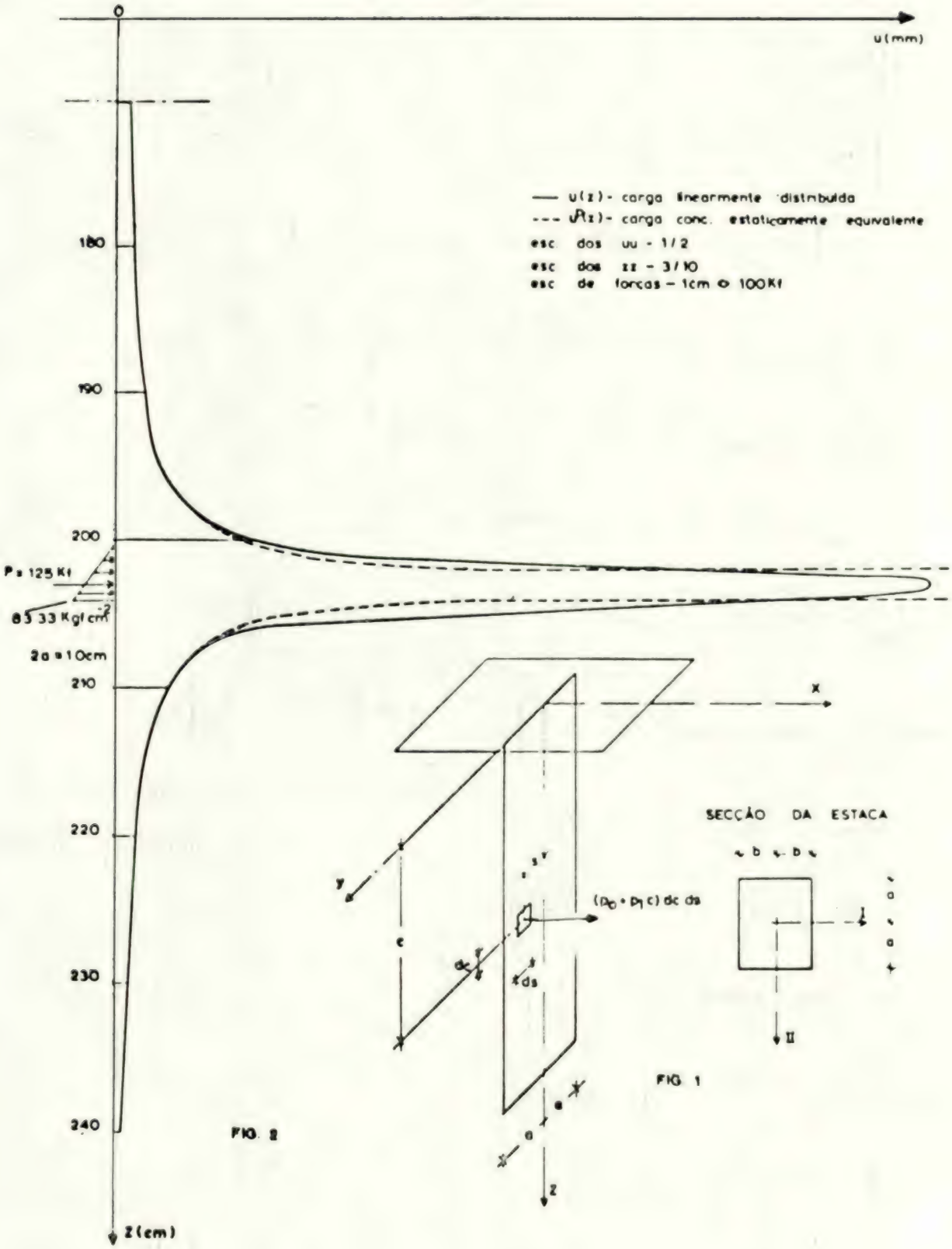
$$S_6 = \int_{-a}^{a}\int_{c_1}^{c_2}\frac{c(p_0+p_1c)}{[s^2+(z+c)^2]^{1/2}\left\{[s^2+(z+c)^2]^{1/2}+z+c\right\}}\,dc\,ds \tag{2.2.10}$$

No cálculo dos integrais (2.2.5-10) fomos conduzidos frequentemente a integrais impróprios na variável s, pois as funções integrandas apresentam descontinuidades infinitas para $s=0$. O cálculo processou-se então geralmente através de limites o que, atendendo ao facto das funções integrandas serem funções pares, relativamente à variável s, se efectuou de acordo com a expressão geral:

$$S_i = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{a}\int_{c_1}^{c_2}\varphi_i\,(s,c)\,dc\,ds\ ,\quad i=1,2,\ldots,6 \tag{2.2.11}$$

em que $\varphi_i\,(s,c)$ representam as funções integradas em (2.2.5-10).

Apresentam-se seguidamente os resultados dos cálculos efectuados, tendo-se designado por $\alpha_i = |z-c_i|$, $\beta_i = z+c_i$ e $\gamma_i = c-z_i$ com $i=1,2$.


0
u(mm)
— u(z) - carga linearmente distribuida
--- u(z) - carga conc. estaticamente equivalente
esc dos uu - 1/2
esc dos zz - 3/10
esc de forcas - 1cm ⇔ 100Kf
180
190
200
210
220
230
240
P = 125 Kf
83.33 Kgf/cm²
2a = 10cm
z(cm)
FIG. 2
x
y
z
c
dc
ds
a
SECÇÃO DA ESTACA
b
FIG. 1

$$z < c_1 \rightarrow S_1 = 2a \left[\log \left(\frac{\alpha_2 + \left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2}}{\alpha_1 + \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2}} \right) (p_0 + p_1 z) + \right.$$

$$+ \alpha_2 \left[\log \left(\frac{a + \left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2}}{\alpha_2} \right) \right] (2p_0 + p_1\beta_2) -$$

$$- \alpha_1 \left[\log \left(\frac{a + \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2}}{\alpha_1} \right) \right] (2p_0 + p_1) +$$

$$\left. + a p_1 \left[\left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2} - \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2} \right] \right. \quad (2.2.12)$$

$$z = c_1 \rightarrow S_1 = 2a(p_0 + p_1 z) \log \left(\frac{\alpha_2 + \left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2}}{a} \right) +$$

$$+ \alpha_2 (2p_0 + p_1\beta_2) \log \left(\frac{a + \left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2}}{\alpha_2} \right) +$$

$$+ a p_1 \left[\left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2} - a \right] \quad (2.2.13)$$

$$\beta_1 < z < c_2 \rightarrow S_1 = 2a \times$$

$$\times \left\{ \log \frac{\left[\alpha_1 + \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2}\right] \left[\alpha_2 + \left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2}\right]}{a^2} \right\} \times$$

$$\times (p_0 + p_1 z) + \alpha_2 (2p_0 + p_1\beta_2) \times \log \left[\frac{a + \left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2}}{\alpha_2} \right] +$$

$$+ \alpha_1 (2p_0 + p_1\beta_1) \log \left[\frac{a + \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2}}{\alpha_1} \right] +$$

$$+ a p_1 \left[\left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2} - \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2} \right] \quad (2.2.14)$$

$$z > c_2 \rightarrow S_1 = 2a(p_0 + p_1 z) \log \left[\frac{\alpha_1 + \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2}}{\alpha_2 + \left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2}} \right] -$$

$$\alpha_2 (2p_0 + p_1\beta_2) \log \left[\frac{a + \left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2}}{\alpha_2} \right] + \alpha_1 (2p_0 + p_1\beta_1) \times$$

$$\times \log \left[\frac{a + \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2}}{\alpha_1} \right] + a p_1 \left[\left(a^2 + \alpha_2^2\right)^{1/2} - \right.$$

$$\left. - \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2} \right] \quad (2.2.15)$$

$$z = c_2 \rightarrow S_1 = 2a \left[\log \frac{\alpha_1 + \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2}}{a} \right] (p_0 + p_1 z) +$$

$$+ \alpha_1 (2p_0 + p_1\beta_1) \left[\log \frac{a + \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2}}{\alpha_1} \right] \times$$

$$+ a p_1 \left[a - \left(a^2 + \alpha_1^2\right)^{1/2} \right] \quad (2.2.16)$$

$$S_2 = 2a(p_0 - z p_1) \log \left[\frac{\beta_2 + (a^2 + \beta_2^2)^{1/2}}{\beta_1 + (a^2 + \beta_1^2)^{1/2}} \right] + \beta_2 (2p_0 + \gamma_2 p_1) \times$$

$$\times \log \left[\frac{a + \left(a^2 + \beta_2^2\right)^{1/2}}{\beta_2} \right] - \beta_1 (2p_0 + \gamma_1 p_1) \times$$

$$\times \log \left[\frac{a + \left(a^2 + \beta_1^2\right)^{1/2}}{\beta_1} \right] + a p_1 \left[\left(a^2 + \beta_2^2\right)^{1/2} - \right.$$

$$\left. - \left(a^2 + \beta_1^2\right)^{1/2} \right] \quad (2.2.17)$$

$$S_3 = 2(p_0 - p_1 z) \log \left[\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{a + \left(a^2 + \beta_1^2\right)^{1/2}}{a + \left(a^2 + \beta_2^2\right)^{1/2}} \right] +$$

$$+ a p_1 \log \left[\frac{\beta_2 + \left(a^2 + \beta_2^2\right)^{1/2}}{\beta_1 + \left(a^2 + \beta_1^2\right)^{1/2}} \right] + \frac{1}{a} \left\{ \left(a^2 + \beta_2^2\right)^{1/2} \times \right.$$

$$\times (2p_0 + \gamma_2 p_1) - \left(a^2 + \beta_1^2\right)^{1/2} (2p_0 + \gamma_1 p_1) -$$

$$\left. - (c_2 - c_1) \left[2p_0 + p_1 (c_2 + c_1) \right] \right\} \quad (2.2.18)$$

$$S_4 = 2 \left\{ (p_0 - 2p_1 z) \log \left[\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{a + \left(a^2 + \beta_1^2\right)^{1/2}}{a + \left(a^2 + \beta_2^2\right)^{1/2}} \right] + \right.$$

$$+ a p_1 \log \left[\frac{\beta_2 + \left(a^2 + \beta_2^2\right)^{1/2}}{\beta_1 + \left(a^2 + \beta_1^2\right)^{1/2}} \right] +$$

$$+ \frac{z}{a} (p_0 - p_1 z) \left[\frac{1}{\beta_2} \left(a^2 + \beta_2^2\right)^{1/2} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{\beta_1} \left(a^2 + \beta_1^2\right)^{1/2} \right] \right\} \quad (2.2.19)$$

$$S_5 = a(p_0 - p_1 z)\log\left[\frac{\beta_2 + \left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2}}{\beta_1 + \left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2}}\right] +$$

$$+ \beta_2(2p_0 + \gamma_2 p_1)\log\left[\frac{a + \left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2}}{\beta_2}\right] -$$

$$- \beta_1(2p_0 + \gamma_1 p_1)\log\left[\frac{a + \left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2}}{\beta_1}\right] +$$

$$+ \frac{1}{a}(p_0 - p_1 z)\left[\beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2\left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2} +\right.$$

$$\left. + \beta_1\left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2}\right] + \frac{p_1}{3a}\left[\left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2}\left(a^2 - 2\beta_2^2\right) -\right.$$

$$\left. - \left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2}\left(a^2 - 2\beta_1^2\right) + 2\left(\beta_2^3 - \beta_1^3\right)\right] \quad (2.2.20)$$

$$S_6 = -2z(p_0 - p_1 z)\log\left[\frac{\beta_2}{\beta_1}\,\frac{a + \left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2}}{a + \left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2}}\right] +$$

$$+ (p_0 - 2zp_1)\log\left[\frac{\beta_2 + \left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2}}{\beta_1 + \left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2}}\right] -$$

$$- \frac{2z}{a}(p_0 - zp_1)\times\left[\left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2} - \left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2} -\right.$$

$$\left. - (c_2 - c_1)\right] + \frac{1}{a}\left(p_0 + 2zp_1\right)\left[\beta_2\left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2} -\right.$$

$$\left. - \beta_1\left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2} - \left(\beta_2^2 - \beta_1^2\right)\right] + \frac{2p_1}{3a}\left\{\beta_2^2\left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2} -\right.$$

$$- \beta_1^2\left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2} - \left(\beta_2^3 - \beta_1^3\right) + a^2\left[\left(a^2+\beta_2^2\right)^{1/2} -\right.$$

$$\left.\left. - \left(a^2+\beta_1^2\right)^{1/2}\right]\right\} \quad (2.2.21)$$

A verificação das expressões foi efectuada tendo em consideração que estas devem tender para as correspondentes expressões contidas em (2.2.2.), quando a carga distribuída $p = p_0 + p_1 c$ tende para uma carga concentrada P aplicada em $z = c$, ou seja:

$$\lim_{\substack{c_1 \to c_2 \to c \\ a \to o}} S_i = S_i^P \qquad \text{com } i = 1, 2, \ldots, 6 \qquad (2.2.22)$$

em que S_i^P são as expressões correspondentes à carga concentrada.

Além da verificação (2.2.22) efectuou-se ainda uma verificação numérica.

Efectivamente os deslocamentos u em $x = y = 0$ correspondentes a uma carga distribuida numa pequena zona interior dum semi-espaço devem ter uma distribuição semelhante aos produzidos pela resultante estaticamente equivalente, a menos duma vizinhança da zona de aplicação da carga. Tal é assegurado pelo princípio de Saint Venant. Os resultados desta verificação apresentam-se na fig. 2.

O deslocamento $(u)\,x = y = 0$ fica caracterizado num dado meio (ν, G) pelos seguintes parâmetros c_1, c_2, p_0, p_1 e z ou seja:

$$(u)_{x=y=0} = u\,(c_1, c_2, p_0, p_1, z) \qquad (2.2.23)$$

3 — FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS ESFORÇOS

3.1 — Generalidades. Vector dos deslocamentos no sistema base

A acção do terreno sobre a estaca foi simulada por sobreposição de cargas triangulares elementares conforme dissemos em 1. Seja então o sistema base representado na fig. 3 *b*) no qual a carga F é equilibrada pelas cargas triangulares representadas, de densidades máximas respectivamente:

$$p_0 = \frac{F(2l + z_n)}{z_1 a(2l + z_n - z_1)} \qquad p_{n+1} = \frac{F z_1}{a(l - z_n)(2l + z_n - z_1)} \qquad (3.1.1)$$

O deslocamento u_{oi} no nó i do sistema base, decompõe-se em duas parcelas. A primeira u'_{oi} devido a um deslocamento de corpo rígido da estaca o qual é originado pelas deformações dos «apoios fictícios» extremos, respectivamente u'_{oo} e $u'_{o(n+1)}$. A segunda devido à deformação de flexão produzida pelas reacções. Temos então,

$$u_{oi} = u'_{oi} - u''_{oi} \qquad (3.1.2)$$

com

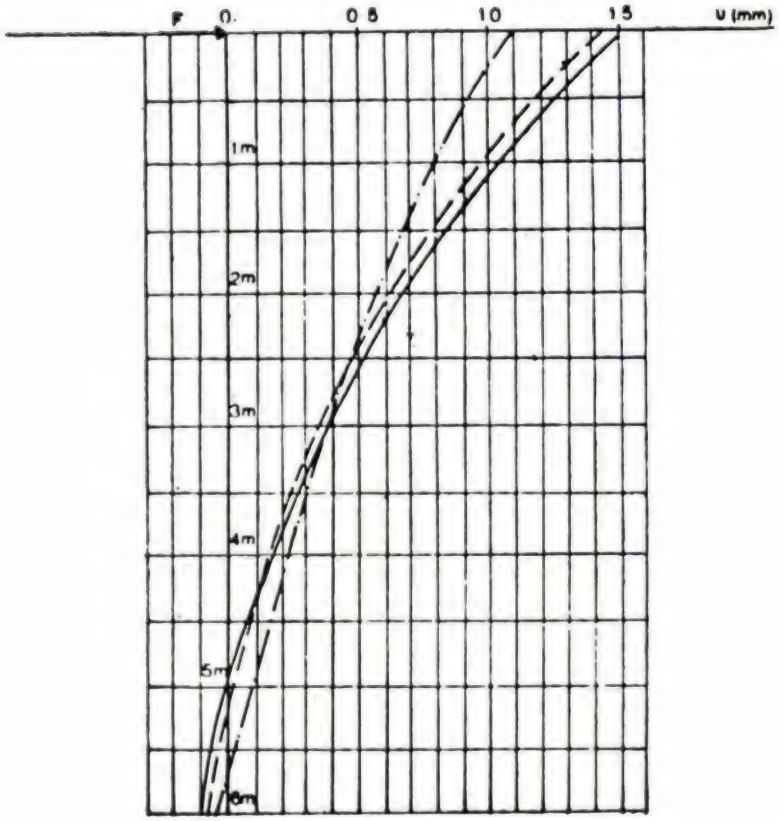
$$u'_{oi} = u_{oo} + \frac{u_{o(n+1)} - u_{oo}}{l}\, z_i \qquad (3.1.3)$$

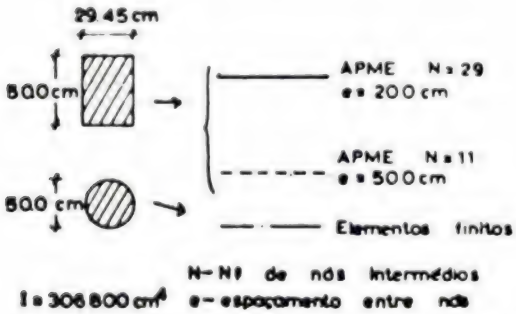
Os deslocamentos u_{oo} e $u_{o(n+1)}$ são os deslocamentos produzidos no terreno pela acção simultânea de cargas iguais mas de sentido oposto às reacções de apoio, os quais são obtidos pela equação (2.2.3).

Designemos por $\underset{\sim}{U}$ o vector dos deslocamentos no sistema base, $\underset{\sim}{U}_o = \{u_{oi}\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

$E_{solo} = 4465\ kf\ cm^{-2}$ $\nu = 0.4$

$l = 6\ m$ $E_{est} = 250000\ kgcm^{-2}$ $F = 111$





A-3

3.2 — Matriz de deformabilidade

3.2.1 — Matriz de deformabilidade do terreno

Consideremos a carga triangular de resultante unitária representada na fig. 3 *c*). O elemento f^t_{ij} da matriz de deformabilidade do terreno é o deslocamento produzido por esta carga unitária distribuida entre os nós $(j-1)$ e $(j+1)$, no nó i. A densidade p_j será portanto:

$$p_j = \frac{1}{a(z_{j+1} - z_{j-1})} \qquad (3.2.1.1)$$

O deslocamento f^t_{ij} será então calculado por sobreposição dos efeitos correspondentes às cargas ① e ② indicadas, a partir da equação (2.2.3). As cargas ① e ② ficam definidas por:

$$\begin{cases} p^{①}_{oj} = -(p_j z_{j-1})/(z_j - z_{j-1}) \\ p^{①}_{1j} = p_j / (z_j \quad z_{j-1}) \end{cases} \begin{cases} p^{②}_{oj} = (p_j \; z_{j+1}) / (z_{j+1} - z_j) \\ p^{①}_{1j} = -p_j / (z_{j+1} - z_j) \end{cases} \qquad (3.2.1.2)$$

pelo que:

$$f^t_{ij} = u(z_{j-1}, z_j, p^{①}_{oj}, p^{①}_{1j}, z_i) + $$

$$+ u(z_j, z_{j+1}, p^{②}_{oj}, p^{②}_{1j}, z_i) \qquad (3.2.1.3)$$

A matriz de deformabilidade do terreno será designada por:

$$F^t = [f^t_{ij}] \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.2.1.4)$$

3.2.2 — Matriz de deformabilidade da estaca

Consideremos a carga triangular unitária representada na fig. 3 *d*). O deslocamento do nó i pode decompor-se em duas parcelas. A primeira corresponde a um deslocamento de corpo rígido da estaca devido à deformabilidade dos «apoios» extremos f^a_{ij}. A segunda corresponde à flexão da estaca f^f_{ij}.

Quanto à primeira parcela temos:

$$f^a_{ij} = f_{oj} + \frac{f_{(n+1)j} - f_{oj}}{1} z_i \qquad (3.2.2.1)$$

em que f_{oj} e $f_{(n+1)j}$ são os deslocamentos no terreno nos nós o e $(n+1)$ produzidos por cargas iguais mas de sentidos contrários às reacções distribuidas, fig. 3 *d*).

Deste modo f_{oj} e $f_{(n+1)j}$ serão calculadas por (2.2.2). As densidades r_{oj} e $r_{(n+1)j}$ determinadas de modo a equilibrar a carga triangular unitária são:

$$r_{oj} = \frac{1}{z_i}\left[\frac{1}{a} - r_{(n+1)j}(z_{n+1} - z_n)\right] \qquad (3.2.2.2)$$

$$r_{(n+1)j} = \left\{-z_i p_2(z_{j+1} - z_{j-1}) + p_j\left[(z_j - z_{j-1})(z_{j-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2z_j) + (z_{j+1} - z_j)(2z_i + z_{j+1})\right]\right\} \Big/ \left[(z_{n+1} - z_n)(z_n + \right.$$
$$\left. + 2z_{n+1}) - z_i(z_{n+1} - z_n)\right] \qquad (3.2.2.3)$$

Teremos então de acordo com (2.2.2) e (2.2.2.3):

$$f_{oj} = u\left(o, z_i, r_{oj}, -\frac{r_{oj}}{z_i}, o\right) + u\left(z_n, 1, \right.$$
$$\left. -\frac{r_{(n+1)j} z_n}{1 - z_n}, \frac{r_{(n+1)j}}{1 - z_n}, o\right) \qquad (3.2.2.4)$$

$$f_{(n+1)j} = u\left(o, z_i, r_{oj}, -\frac{r_{oj}}{z_i}, 1\right) + u\left(z_n, 1, \right.$$
$$\left. -\frac{r_{(n+1)j} z_n}{1 - z_n}, \frac{r_{(n+1)j}}{1 - z_n}, 1\right) \qquad (3.2.2.5)$$

A segunda parcela f^f_{ij} corresponde à flexão da estaca e representa portanto o deslocamento produzido no nó i por uma carga triangular unitária e pelas correspondentes «reacções» distribuidas de apoio. As condições de fronteira correspondem à viga simplesmente apoiada em $z = o$ e $z = 1$ ou seja

$$(u)_{z=o} = (u)_{z=1} = 0 \quad e \quad \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_{z=o} = \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_{z=1} = 0.$$

O elemento f^e_{ij} da matriz de deformabilidade da estaca será então:

$$f^e_{ij} = f^a_{ij} + f^f_{ij} \qquad (3.2.2.6)$$

A matriz é designada por:

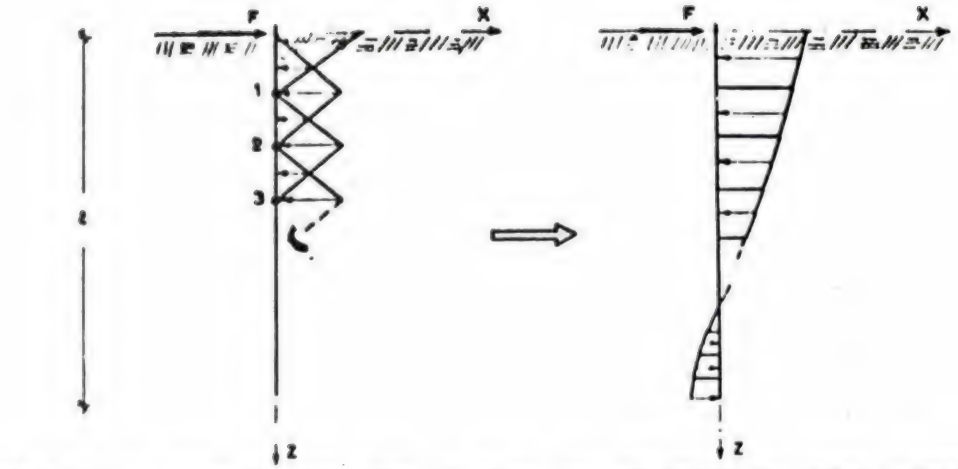
$$\underset{\sim}{F^e} = [f^e_{ij}] \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (3.2.2.7)$$

3.2.3 — Compatibilidade

A compatibilidade dos deslocamentos do solo e da estaca no nó j exprime-se por:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(f^t_{ij} + f^e_{ij}\right) Q_j = u_{oi} \qquad , \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

(3.2.2.8)



Simulação da acção do solo sobre a estaca por sobreposição de cargas triangulares

FIG. 3a)

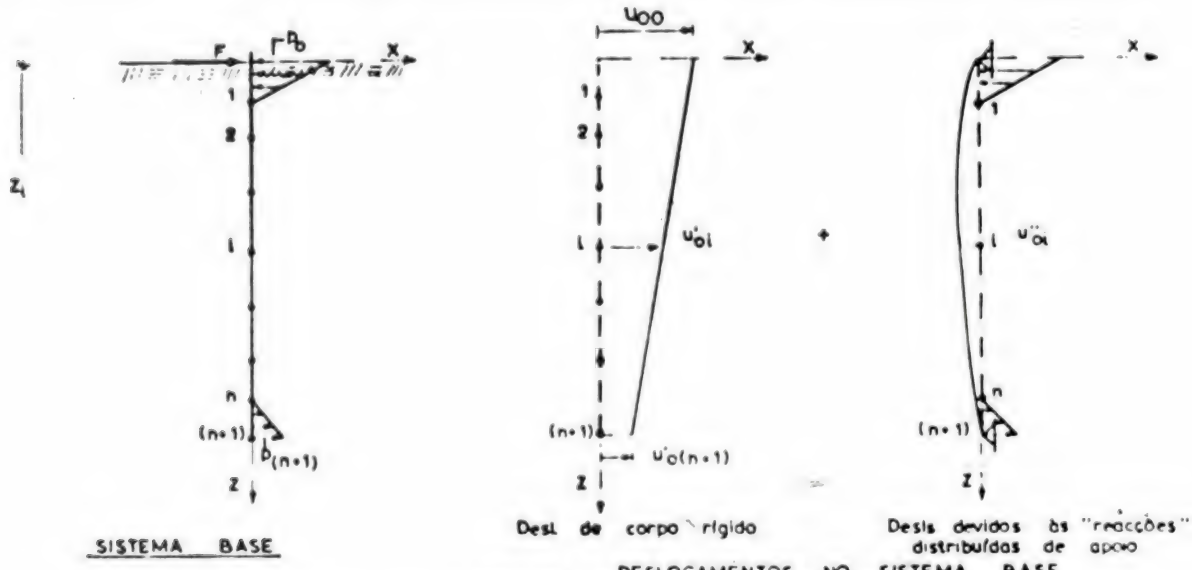


FIG. 3b)

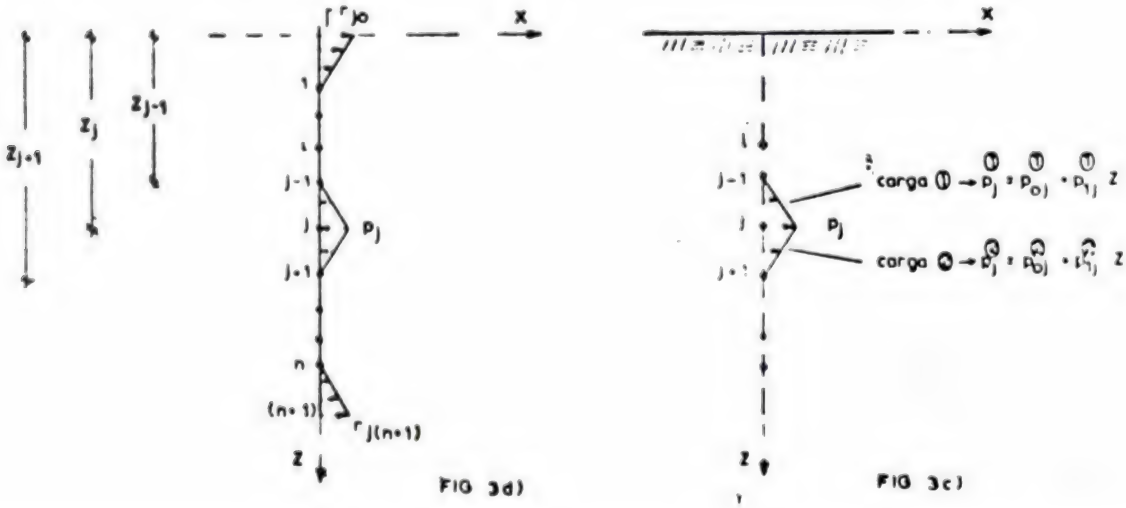


FIG 3d) FIG 3c)

em que a componente Q_j do vector das incógnitas, $\underset{\sim}{Q} = \{Q_j\}$, representa o valor da resultante da carga triangular distribuída entre os nós (j−1) e (j+1).

A equação (3.2.2.8) pode tomar a forma matricial:

$$(\underset{\sim}{F}^t + \underset{\sim}{F}^e)\ \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{U}_o \qquad (3.2.2.9)$$

3.2.4 — Cálculo dos deslocamentos e esforços na estaca

Atendendo à compatibilidade, os deslocamentos finais na estaca podem ser facilmente obtidos uma vez conhecido o vector $\underset{\sim}{Q}$, pela equação (3.2.2.9).

$$\underset{\sim}{u}^e = \underset{\sim}{u}^t = \underset{\sim}{F}^t \underset{\sim}{Q} \qquad (3.2.4.1)$$

em que $\underset{\sim}{u}^e$ e $\underset{\sim}{u}^t$ são os vectores dos deslocamentos nodais na estaca e no solo, respectivamente. O cálculo dos esforços na estaca pode ser feito directamente a partir do vector $\underset{\sim}{Q}$, ou a partir dos deslocamentos $\underset{\sim}{u}^e$, sendo em qualquer caso um simples problema de Resistência de Materiais, pelo que aqui não será abordado.

4 — PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO — APME — Aplicação do Problema de Mindlin a Estacas

Compõe-se fundamentalmente dum programa principal e quatro subrotinas. Duas delas, «SUBROUTINE UTE» e «SUBROUTINE DELTA», calculam as matrizes de deformabilidade do terreno, $\underset{\sim}{F}^t$, da estaca, $\underset{\sim}{F}^e$, e o vector dos deslocamentos no sistema base, $\underset{\sim}{U}_o$, tendo em conta as equações expostas em (2.2), (3.1) e (3.2). As duas restantes, «SUBROUTINE ARRAY» e «SUBROUTINE SIMQ» do CCUTL(*), destinam-se simplesmente à resolução do sistema de equações lineares (3.2.2.9).

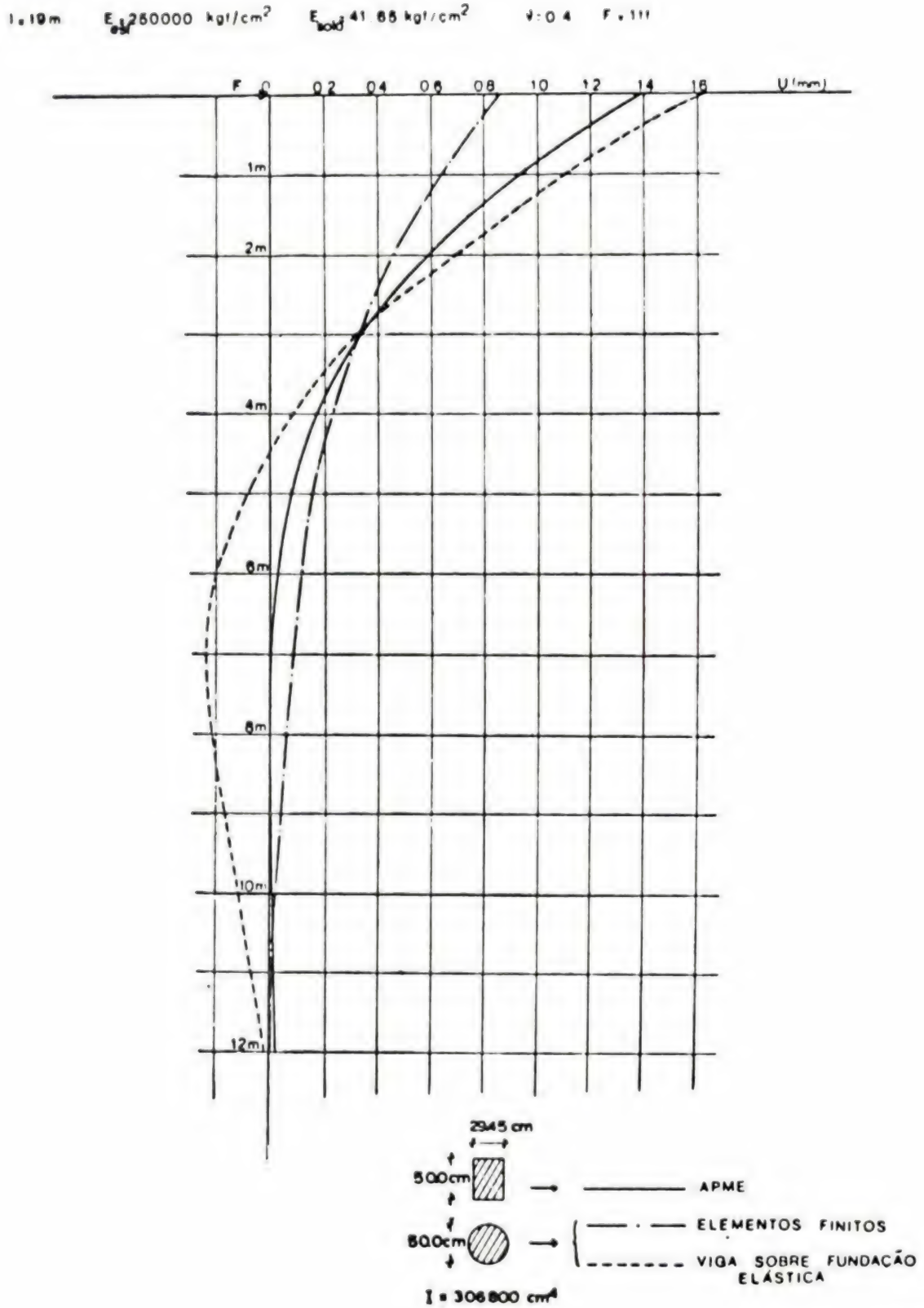
O programa APME foi desenvolvido em linguagem FORTRAN IV para o Computador IBM 360/DOS do CCUTL. O número total de memórias ocupadas é de 51 K bytes, para um número máximo de 30 nós intermédios.

O tempo de execução do programa para os exemplos referidos nunca ultrapassou os 3 minutos. Apresenta-se em anexo um organograma do programa APME.

5 — EXEMPLOS

Apresentam-se em anexo os diagramas de deslocamentos em estacas obtidos com o programa APME, os quais são comparados com os obtidos em [2] pelo método dos elementos finitos. Refere-se que estes últimos foram obtidos para estacas de secção circular pelo que, tendo sido consideradas neste traba-

(*) Centro de Cálculo da Universidade Técnica de Lisboa.


l = 19m
E = 250000 kgf/cm²
E = 41 66 kgf/cm²
ν = 0 4
F = 111
F
0
0 2
0 4
0 6
0 8
1 0
1 2
1 4
1 6
U (mm)
1m
2m
4m
6m
8m
10m
12m
29 45 cm
50 0cm
APME
50 0cm
ELEMENTOS FINITOS
VIGA SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA
I = 306 800 cm⁴
A-2

lho estacas rectangulares, se tomou para efeitos de comparação uma estaca rectangular de largura igual ao diâmetro e com o mesmo momento de inércia.

6 — CONCLUSÕES

Pretendemos com esta comunicação apresentar um método capaz de permitir a comprovação dos resultados obtidos pela técnica dos elementos finitos na resolução do problema em causa, nos casos em que o meio é homogéneo, resistente à tracção e de comportamento linear. Esta comprovação pareceu-nos necessária por julgarmos que o número de elementos empregados é muitas vezes insuficiente. E, efectivamente, os resultados obtidos mostram certas discrepâncias entre os resultados obtidos pelos dois métodos.

O método que apresentámos pode servir de aferidor porque o erro de discretização com ele associado é geralmente muito inferior ao correspondente ao método dos elementos finitos. Lembramos que o referido erro provém, no nosso caso, do facto de a compatibilização dos deslocamentos ser feita exclusivamente na direcção da força aplicada na cabeça da estaca e somente num número finito de nós ao longo do respectivo eixo. Esta última causa de erro pode porém ser facilmente controlada fazendo variar o número de nós e observando as consequências desta variação.

Está evidentemente fora de questão a grande generalidade do método dos elementos finitos, que lhe dá possibilidades de simulação do comportamento real da estaca e do terreno com que o nosso não pode competir. Não queremos no entanto deixar de chamar a atenção para a não resistência à tracção do solo poder ser facilmente simulada com a nossa técnica utilizando o método simplificado proposto por Kanayan (ver [2]).

7 — AGRADECIMENTO

Agradece-se à Fundação Calouste Gulbenkian o financiamento deste trabalho por intermédio do Projecto de Investigação «Matemáticas Aplicadas à Engenharia Civil».

Agradecemos também ao Prof. Arantes e Oliveira a sugestão do tema do trabalho e a sua constante orientação.

Ao CCUTL, em cujo computador os cálculos foram efectuados, desejamos ainda manifestar o nosso reconhecimento.

8 — BIBLIOGRAFIA

[1] — Handbook of Engineering Mechanics — Y.Y.YU. — Mc Graw Hill, 1962.

[2] — Estacas Submetidas a Solicitações Horizontais — Cálculo pelo método dos elementos finitos — Pedro Ivan Rogedo — Tese para especialista do LNEC, 1970.

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
International Product Innovation Congress and Exhibition	Düsseldorf — R. F. A. Fevereiro - 77
International Conference of the Tool and Die Industrye	Viena — Austria Maio - 77
IV Assemblea General del Centro National de Investigaciones	Madrid — Espanha 31 de Maio a 31 de Junho - 1977
Third International Symposium in Hidrology	Colorado State University — U. S. A. 27 a 29 de Junho - 1977
The Second International Conference on Transfer of Water Resources Information	Colorado State University — U. S. A. 30 de Junho a 2 de Julho - 77
Faire International Soudage et Découpage	ESSEN — R. F. A. 21 a 28 de Setembro - 77
L 'INTERPACK' 78 — 8.ª Feira Internacional de Máquinas de Embalar	Düsseldorf — R. F. A. 8 a 14 de Junho - 78
1 ière Foire Specialisée International sur la Téchnique Sidérurgique	Düsseldorf — R. F. A. Junho - 1979

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 436

Ano LI — Novembro 1976

C. D. U. 517.43:517.3:518.4

M. ABREU FARO

MÉTODO GEOMÉTRICO E MECÂNICO PARA DETERMINAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 79 a 86

Apresenta-se um método geométrico de obtenção das Transformações de Lorentz numa representação gráfica em que os eixos coordenados e homólogos dos dois referenciais se fazem coincidir. Utilizam-se coordenadas cartesianas ortogonais.

O método é susceptível de uma fácil mecanização tendo em vista o traçado automático de trajectórias nos diferentes planos coordenados.

Sob outra forma e numa diferente aproximação, o método foi apresentado pela primeira vez numa comunicação feita em 6 de Maio à classe de Ciências, da Academia das Ciências de Lisboa, sob a designação «Método geométrico de obtenção das Transformações de Lorentz. Propriedades do método e suas aplicações».

Num próximo número da «Técnica» será publicado um artigo em português, no qual se procederá a uma aplicação do método à resolução de determinados problemas básicos da electrodinâmica dos corpos em movimento.

C. D. U. 512.8.001.2

J. C. CONTE

ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DE GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 87 a 96

Dado um grupo de transformações e um conjunto de funções linearmente independentes discute-se o modo como, tomando como base as funções referidas, deve ser definido um conjunto de matrizes constituindo um grupo isomorfo do grupo de transformações.

C. D. U. 621.3.018.757:621.317.75

J. F. BORGES DA SILVA
J. M. VIEGAS GONÇALVES

TRANSMISSÃO DE RUIDO ATRAVÉS DUM DISPOSITIVO RETENTOR DE AMOSTRAS

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 97 a 112

Com base num modelo apropriado dum dispositivo retentor de amostras, estabelece-se a expressão da função densidade espectral à saída, devida à presença à entrada, de flutuações com função de auto-correlação especificada.

O modelo utilizado para representar o retentor leva em linha de conta os valores não desprezáveis da constante de tempo e do tempo de captação do dispositivo.

Apresentam-se os resultados de medidas efectuadas num dispositivo real, para confirmação das previsões teóricas e ilustra-se a aplicação prática do retentor, com os resultados obtidos pelo seu uso na recuperação e reprodução da forma de curva duma grandeza variável imersa em ruído.

G. D. U. 624.074.2

EDUARDO ROMANO DE ARANTES E OLIVEIRA

TEORIAS DE CASCAS ENVOLVENDO MOMENTOS DE ORDEM SUPERIOR À PRIMEIRA

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 113 a 119

Tendo o desenvolvimento extraordinário dos métodos numéricos, e em especial do método dos elementos finitos, despertado interesse pela construção de novos modelos estruturais, é objectivo do trabalho apresentar e comparar duas teorias de cascas nas quais as tensões generalizadas são as resultantes e os momentos de qualquer ordem das tensões distribuidas na espessura. Na base do trabalho está a consideração de que o conhecimento dos momentos de ordem superior à primeira permite mais precisa determinação da distribuição das tensões que a que pode ser obtida de uma teoria de tipo convencional.

C. D. U. 624.131.522.4:518

ANTÓNIO JOSÉ REIS
EDUARDO BORGES PIRES

APLICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINDLIN NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA ESTACA SOLICITADA POR UMA FORÇA HORIZONTAL

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 121 a 131

Com base na solução do problema de Mindlin que considera o campo elástico gerado por uma força concentrada actuante num ponto interior dum semi-espaço, do qual se deduzem por integração os deslocamentos devidos a uma carga distribuida linearmente, apresenta-se um método para a resolução do problema da estaca cravada num solo homogéneo solicitada por uma força horizontal.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 436

LI — November 1976

U. D. C. 624.074.2

EDUARDO ROMANO DE ARANTES E OLIVEIRA

THEORIES OF SHELLS WITH HIGHER ORDER MOMENTS

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 113 a 119

Considering the interest of new structural models which the expansion of the numerical techniques of analysis, like the finite element method, very much increased, the aim of the paper is the presentation and comparirson of two theories of shells in which the generalized stresses are the resultants and higher order moments of the stresses distributed in the thickness. The basic idea of the paper is the fact that the knowledge of higher order moments permits a more precise determination of the stress distribution that the one which can be provided by a theory of a more convencional kind.

U. D. C. 517.43:517.3:518.4

M. ABREU FARO

A GEOMETRICAL AND MECHANICAL METHOD TO DETERMINE LORENTZ TRANSFORMATIONS

Técnica N.º 433 — LI — 11-1976, p. 79 a 86

A geometrical method to obtain Lorerntz Transformations in a graphical representation where the axes of the two frames of reference are made to coincide, is presented. Orthogonal coordinates are used and the method can be mechanized with a view to an automatic drawing of trajectories on the different coordinate planes.

Under a different form and with a different approach, the method was firts presented to the Science Class of Academia das Ciências de Lisbon, on the 6th of May 1976, under the title «Geometrical Method to obtain Lorentz Transformations. Properties of the Method and its Applications».

In one of its next issues Tecnica will publish an article in portuguese where the method will be shown as applied to the resolution of certain basic problems of the electrodynamics of moving media.

U. D. C. 624.131.522.4:518

ANTONIO JOSÉ REIS
EDUARDO BORGES PIRES

APPLICATION OF THE SOLUTION OF MINDLIN'S PROBLEM TO THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE PILE ACTED BY A HORIZONTAL FORCE

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 121 a 131

The solution of Mindlin's problem, which considers the elastic field generated by a force concentrated in a point located within an elastic half-space, from which the effects of forces distributed on lines can be generated, is used for the solution of the problem of the pile acted by a horizontal force.

U. D. C. 512.8.001.2

J. C. CONTE

SOME COMMENTS ON MATRICIAL REPRESENTATIONS OF TRANSFORMATION GROUPS

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 87 a 96

Given a transformation group and a set of linearly independent functions, the method by which a set of matrices which forms a group isomorphous with the transformation group must be defined is discussed.

U. D. C. 621.3.018.757:621.317.75

J. F. BORGES DA SILVA
J. M. VIEGAS GONÇALVES

NOISE TRANSMISSION THROUGH A SAMPLE-AND-HOLD DEVISE

Técnica N.º 436 — LI — 11-1976, p. 97 a 112

Based on an appropriate model of a sample-and-hold device, a theory is developed leading to an expression for the output spectral density function due to the presence at the input of fluctuations with a specified auto-correlation function.

The sample-and-hold model used takes into account the non-negligible time constant and acquisition time of the device.

Results of measurements made on a real device are presented to confirm the theoretical predictions and an applications example is described being illustrated with results obtained, using a sample-and-hold device, for the recovery and display of wave-forms buried in noise.

Publicações Recebidas

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

— AGROS
Associação dos Estudantes de Agronomia

— ANALLES DE MECANICA Y ELECTRICIDAD
Asociacion de Ingenieros del I. C. A. I.

— ASEA — REVUE

— ACTA TECHNICA
Academiae Scientiarum Hungariae

— ANAIS DO CLUBE MILITAR NAVAL

— ANALYTICAL ABSTRACTS
Society for Analytical Chemistry

— ACIER - STAHL - STELL

— ANNALES
Institut Technique du Batiment et des Travaux Public

— AEG - TELEFUNKEN AL DIA

— AR COMPRIMIDO
Atlas Copco

— BOLETIM DA CAMARA MUNICIPAL DE SÁ DA BANDEIRA

— BOLETIM ECONÓMICO E FINANCEIRO
Banco Borges & Irmão

— BOLETIM
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM MENSAL DE INFORMAÇÃO
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— BULLETIN OF THE SEISMOGRAPHIC STATIONS
University of California

— BOLETIM DEL CEMENTO PORTLAND
Instituto del Cemento Portland Argentino

— BOLETIM GTH
Gabinete Técnico da Habitação da Câmara Municipal de Lisboa

— BOLETIM
Sociedade Geológica de Portugal

— BOLETIM INFORMATIVO IRANOR
Instituto Nacional de Racionalizacion y Normalizacion

— BOLETIM DA ELECTROQUÍMICA E CORROSÃO
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM
Departamento de Imprensa e Informação do Governo da República Federal da Alemanha

— BOLETINUL
Institutului Politehnic Bucaresti

— BOLETIM
Associação Industrial de Angola

— BOLETIM DO PORTO DE LISBOA
Administração-Geral do Porto de Lisboa

— BOLETIM DO SERVIÇO CARTOGRÁFICO DO EXÉRCITO

— BOLETIM DE MINAS
Direcção-Geral de Minas e Serviços Geológicos

— BULLETIN DE LA CHAMBRE DE COMMERCE BELGE AU PORTUGAL

— BULLETIN
Agence Internationale de L'energie Atomique
Instituto dos Produtos Florestais

— CENIM

— CORTIÇA
Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— (JOURNAL OF) CHEMICAL EDUCATION
Division of Chemical Education of the American Chemical Society

— CIMENTO E CONCRETO
Associação Brasileira de Cimento Portland

— COMUNICAÇÕES ELÉCTRICAS
International Telephone and Telegraph Corporation

— CONSTRUCTI

— CARTA GEOLÓGICA DE ANGOLA
Direcção Provincial dos Serviços de Geologia e Minas

— CEMENTO HORMIGÓN

— COURRIER CERN

— COLLECTION
Czechoslovak Academy of Sciences

— DYNA
Asociacion de Engenieros Industriales de España

— EL ESTAÑO Y SUS APLICACIONES
Tin Research Institute

— ELECERICITE DE FRANCE
Direction des Etudes et Recherches

— ELECTRICIDADE
Empresa Editorial Electrotécnica Edel, Lda.

— ENDEAVOUR
Imperial Chemical Industries Limited

— ESTUDOS
Banco Fomento Nacional

— ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS
Serviço de Fomento Mineiro

— ELECTRICAL COMMUNICATION
International Telephone and Telegraph Corporation

— ECONOMIC REVIEW
Câmara de Comércio Luso-Britânica

— FUNDIÇAO
Associação Portuguesa de Fundição

— FUNDEXPORT
Fundo de Fomento de Exportação

— GEOTÉCNICA
Revista da Sociedade Portuguesa de Geotécnica

— INFORMES DE LA CONSTRUCCIÓN
Instituto Eduardo Torroja

— ION
Sindicato Nacional de Indústrias Químicas

— INDÚSTRIA DE MOÇAMBIQUE
Associação Industrial de Moçambique

— LA HOUILLE BLANCHE
Société Hydrotechnique de France

— LES NOUVELLES DE L'E. I. B.

— METALLURGIA AND METAL FORMING
National Association of drop Forgers and Stampers

— MACHINE TOOL REVIEW

— NOTICIARIO DOS ELASTÓMEROS
du Pont

— ONU (CHRONIQUE MENSUELLE)
Service de l'Information de l'Organization des Nations Unies

— O PROPULSOR
Sindicato Nacional dos Oficiais da Marinha Mercante

— PRELO
Imprensa Nacional - Casa da Moeda

— PORTUGAL - ALEMANHA
Câmara de Comércio e Indústria Luso-Alemã

— REVISTA DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
Universidade de Lourenço Marques

— REVUE LANDIS E GYR (EDITION ELECTRICITÉ)

— REVUE D'IENA

— REVUE SIEMENS
Siemens Antiengesellschaft

— REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

— LA REACHERCHE AÉROSPATIALE
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

— REVISTA DE METALURGIA
Cenim - Centro Nacional de Investigaciones Metalúrgicas

— RAIL INTERNATIONAL
Association Internationale du congrès des chemins de fer et de L'Union Internationale des Chemins de fer

— REVISTA TÉCNICA SULZER

— REVISTA DANFOSS

— REVISTA AGRONÓMICA
Sociedade de Ciências Agronómicas de Portugal

— TECHNIQUES FRANÇAISES (BATIMENT TRAVAUX PUBLICS URBANISME)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (INDUSTRIE DE METAUX)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (TRANSPORTS)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (CHIMIE GAZ PETROLE) BIENS DE CONSOMMATION)
Services Économiques de L'Embassade de France

— WORLD HEALTH ORGANIZATION PUBLICATIONS
World Health Organization

— WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HOCSCHULE
Architektur und Bauwesen Weimar

VICENTE FERREIRA E BRAZÃO FARINHA

TABELAS TÉCNICAS

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES
DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - LISBOA

7ª EDIÇÃO REVISTA E ACTUALIZADA
PREÇO 250.00
DESC. 10% AOS ASSINANTES

Publicidade com critério.

Anuncie na

técnica REVISTA DE ENGENHARIA